

3 Integrální počet funkcí jedné reálné proměnné

3.1 Primitivní funkce, neurčitý integrál

Definice

Nechť f je reálná funkce jedné reálné proměnné. Funkci F nazveme **primitivní funkcí** k funkci f na intervalu (a, b) , jestliže pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$f(x) = F'(x).$$

Pro primitivní funkci používáme též název **neurčitý integrál** a označení

$$\int f(x) dx.$$

Samotnou funkci f nazýváme **integrandem** příslušného neurčitého integrálu.

Věta

Primitivní funkce F je funkcí f určena až na aditivní konstantu jednoznačně. Platí tedy:

- je-li na nějakém intervalu (a, b) funkce F primitivní k funkci f , je funkce $F + C$, kde C je reálná konstanta, na stejném intervalu rovněž primitivní k funkci f ;
- jsou-li naopak F a G dvě primitivní funkce k zadané funkci f na intervalu (a, b) , platí pro každé x z tohoto intervalu $F(x) - G(x) = C$, kde C je opět nějaká reálná konstanta.

Věta

Primitivní funkce je vždy funkcí spojitou.¹

Věta (linearita integrálu)

Existují-li na intervalu (a, b) integrály na pravých stranách uvedených rovností, platí na tomto intervalu

$$\begin{aligned}\int [f(x) + g(x)] dx &= \int f(x) dx + \int g(x) dx, \\ \int [f(x) - g(x)] dx &= \int f(x) dx - \int g(x) dx, \\ \int [cf(x)] dx &= c \int f(x) dx.\end{aligned}$$

Poznámka

Uvedené rovnosti plynou okamžitě z pravidel o derivování součtu, rozdílu a násobku funkce (viz kapitola 1.2).

Pravidlo o integrování součtu (i rozdílu) je možno rozšířit prostřednictvím principu matematické indukce na libovolný konečný počet sčítanců v integrandu levé strany:

$$\int [f_1(x) + \dots + f_n(x)] dx = \int f_1(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx.$$

Poznámka

Na základě zkušeností s derivacemi elementárních funkcí² můžeme přímo z definice určit některé speciální primitivní funkce. Výsledky spolu s odpovídajícími vzorci pro derivování shrnuje následující tabulka.

¹ Naopak je možno ukázat, že funkce spojitá na intervalu má vždy primitivní funkci. Viz též kapitola 3.6.

² Viz tabulka v kapitole 1.2.

Vybrané primitivní funkce

$f(x)$	$F(x) \equiv \int f(x)dx$	$g(x)$	$g'(x)$
x^n ($n \neq -1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	x^n	nx^{n-1}
$x^{-1} \equiv \frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	$e^x + C$	e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	a^x	$a^x \ln a$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\sin x$	$\cos x$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\cos x$	$-\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotg} x + C$	$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$ $-\operatorname{arccotg} x + C$	$\operatorname{arctg} x \equiv \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$ $-\arccos x + C$	$\arcsin x \equiv \frac{\pi}{2} - \arccos x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3.2 Integrace per partes

Na základě pravidla o derivování součinu¹ snadno nahlédneme, že platí

Věta

Mají-li funkce f a g na intervalu (a, b) vlastní derivace a existuje-li na tomto intervalu neurčitý integrál na pravé straně uvedené rovnosti, existuje i integrál na straně levé a platí

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

Poznámka

Uvedené pravidlo může být užitečné, pokud se nám podaří integrand neurčitého integrálu, který neumíme vypočítat přímo, rozložit na součin $f'(x)g(x)$ tak, že nový integrál na pravé straně výše uvedené identity už vyčíslit umíme. Tento způsob integrace se nazývá integrací *per partes*, čili *po částech*. Bohužel, ne vždy je však zmíněný rozklad zřejmý na první pohled, a tak použití věty o integraci *per partes* vyžaduje obvykle nemálo praktických zkušeností.

V následující tabulce shrnujeme několik jednoduchých integrálů, k jejichž výpočtu je možno užít metodu *per partes* s velkým užitekem.

¹ Viz kapitola 1.2.

Vybrané integrace per partes

integrál	rozklad integrandu	
	$f'(x)$	$g(x)$
$\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C$	1	$\ln x$
$\int x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C$	x^n	$\ln x$
$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}(\sin x \cos x + x) + C$ ⁽¹⁾	$\cos x$	$\cos x$
$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$ ⁽²⁾	$\sin x$	$\sin x$
$\int x e^x \, dx = e^x (x - 1) + C$	e^x	x
$\int x \sin x \, dx = \sin x - x \cos x + C$	$\sin x$	x
$\int x \cos x \, dx = \cos x + x \sin x + C$	$\cos x$	x
$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ ⁽²⁾	1	$\arcsin x$
$\int \arccos x \, dx = x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ ⁰	1	$\arccos x$

Poznámka

Při výpočtu některých integrálů musíme integraci *per partes* provést opakovaně. Použití metody *per partes* v jediném cyklu nás sice ke kýženému výsledku přiblíží, neumožní nám jej však dosáhnout. Místo opakovaného použití vzorce pro integraci *per partes* je v takovém případě obvykle technicky mnohem jednodušší použít obecných **rekurentních vztahů**, které je možno prostřednictvím věty o integrování *per partes* získat. Některé důležité rekurentní vztahy shrnuje následující tabulka, mnoho dalších je možno nalézt ve specializované literatuře (viz např. [2], [4] a [5]), kam rovněž odkazujeme zájemce o podrobnosti.

Vybrané rekurentní vztahy ³

integrál	rozklad integrandu	
	$f'(x)$	$g(x)$
$\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx, \quad n \geq 1$	e^x	x^n
$\int \ln^n x \, dx = x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x \, dx, \quad n \geq 1$	1	$\ln^n x$
$\int x^n \sin x \, dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x \, dx, \quad n \geq 1$	$\sin x$	x^n

¹ Při výpočtu integrálu je nutno kromě integrace *per partes* použít dobře známou identitu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
Blíže viz doporučená literatura.

² Integrál na pravé straně uvedené rovnosti můžeme vypočítat např. pomocí substituční metody (viz následující kapitola).

³ n označuje v uvedených vztazích celé číslo.

$\int x^n \cos x \, dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x \, dx, \quad n \geq 1$	$\cos x$	x^n
$\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx, \quad n \neq 0 \quad (1)$	$\sin x$	$\sin^{n-1} x$
$\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx, \quad n \neq 0 \quad (1)$	$\cos x$	$\cos^{n-1} x$
$\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx, \quad n \geq 2$	1	$\frac{1}{(1+x^2)^n}$

Příklad

Ukažme si použití rekurentního vzorce při výpočtu $\int x^5 e^x \, dx$.²

Především pro jednoduchost označme $\int x^n e^x \, dx$ symbolem I_n . Podle zadání tedy hledáme I_5 a výše uvedený rekurentní vzorec můžeme přepsat do tvaru

$$I_0 = e^x,$$

$$I_n = x^n e^x - n I_{n-1}.$$

Celý výpočet zahrnuje pět jednoduchých algebraických kroků:

$$I_1 = x e^x - I_0 = x e^x - e^x = (x-1) e^x,$$

$$I_2 = x^2 e^x - 2 I_1 = x^2 e^x - 2(x-1) e^x = (x^2 - 2x + 1) e^x,$$

$$I_3 = x^3 e^x - 3 I_2 = x^3 e^x - 3(x^2 - 2x + 1) e^x = (x^3 - 3x^2 + 6x - 3) e^x,$$

$$I_4 = x^4 e^x - 4 I_3 = x^4 e^x - 4(x^3 - 3x^2 + 6x - 3) e^x = (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 12) e^x,$$

$$I_5 = x^5 e^x - 5 I_4 = x^5 e^x - 5(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 12) e^x = (x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 60) e^x.$$

Po doplnění nezbytné integrační konstanty získáváme nakonec výsledek

$$\int x^5 e^x \, dx = (x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 60) e^x + C.$$

¹ Při výpočtu integrálu je nutno kromě integrace *per partes* použít dobře známou identitu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Blíže viz doporučená literatura.

² Výpočet pomocí opakovaného použití pravidla o integrování *per partes* proveďte samostatně a porovnejte pracovní obou postupů.

3.3 Integrace substitucí

Věta (první věta o substituci)

Nechť $G(y)$ je primitivní funkce k funkci $g(y)$ a funkce $f(x)$ je diferencovatelná¹. Pak funkce $G(f(x))$ je primitivní funkcí k funkci $g(f(x)) \cdot f'(x)$.²

Poznámka

Předcházející větu je možno stručně zapsat ve tvaru

$$\int g(f(x))f'(x)dx = \int g(y)dy \Big|_{y=f(x)}.$$

To znamená, že integrál na levé straně můžeme určit pomocí integrálu na straně pravé, v němž po provedení výpočtu dosadíme za novou proměnnou y funkci $f(x)$. Situaci jsme si tedy formálně zjednodušili **substitucí (náhradou)** $f(x) \rightarrow y$.

Použití první věty o substituci tedy zahrnuje

- rozklad integrandu původního integrálu na výše naznačený součin,
- výpočet nového, zpravidla jednoduššího integrálu.

Příklad

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = \left[\begin{array}{l} y = \cos(x) \\ y' = -\sin(x) \end{array} \right] = - \int \frac{1}{y} \, dy \Big|_{y=\cos x} = -\ln|\cos x| + C. \quad ^3$$

Věta (druhá věta o substituci)

Nechť $f(x)$ je integrovatelná funkce a funkce $h(t)$ je diferencovatelná a prostá na nějakém intervalu reálné osy. Pak můžeme psát

$$\int f(x)dx = \int f(h(t))h'(t)dt \Big|_{t=h^{-1}(x)}.$$

Poznámka

Úpravy prováděné při výpočtu integrálu na pravé straně uvedené formule zahrnují náhradu $x \rightarrow h(t)$ a formální náhradu $dx \rightarrow h'(t)dt$. Nakonec je třeba se vždy vrátit k původní nezávislé proměnné, čehož dosáhneme zpětnou substitucí $t \rightarrow h^{-1}(x)$, kde symbolem h^{-1} označujeme funkci inverzní k funkci h .

Poznámka

Při praktickém použití druhé věty o substituci tvoří zpravidla nejobtížnější část výpočtu nalezení vhodné substituce $x = h(t)$, která by řešený problém dostatečně zjednodušila. To zpravidla vyžaduje velkou praktickou zkušenost, kterou můžete získat jen vyřešením dostatečného množství příkladů různých typů. Naštěstí byly pro mnoho úloh, s nimiž se můžeme setkat v přírodních a technických vědách, k cíli vedoucí substituce nalezeny a shrnuty ve všech základních učebnicích integrálního počtu a v matematických příručkách (viz např. [2], [4] a [5]). O některých speciálních substitucích se zmiňujeme v kapitole 3.5.

¹ Obojí na nějakém otevřeném intervalu reálné osy.

² Jak je zřejmé z věty o derivování složené funkce (viz kapitola 1.2).

³ Samostatně proveďte obdobným způsobem výpočet $\int \operatorname{cotg} x \, dx$.

Příklad

$$\int e^{\alpha x} dx = \left[x = \frac{t}{\alpha}; dx = \frac{dt}{\alpha} \right] = \int e^t \frac{dt}{\alpha} \Big|_{t=\alpha x} = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + C.$$

Příklad

Při výpočtu následujícího integrálu zavádíme novou proměnnou u , jejíž hodnoty omezujeme intervalem $(-\pi/2, \pi/2)$. Pečlivě si rozmyslete, kde všude během výpočtu tento předpoklad využijeme. Pak se pokuste podle níže uvedeného návodu určit tentýž integrál s proměnnou $u \in (\pi/2, 3\pi/2)$.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \left[\begin{matrix} x = \sin u \\ dx = \cos u du \end{matrix} \right] = \int \sqrt{1-\sin^2 u} \cos u du \Big|_{u=\arcsin x} = \int \cos^2 u du \Big|_{u=\arcsin x} = \\ &= \frac{1}{2} (\sin u \cos u + u) + C \Big|_{u=\arcsin x} = \frac{1}{2} (\sin u \sqrt{1-\sin^2 u} + u) + C \Big|_{u=\arcsin x} = \frac{1}{2} (\arcsin x + x \sqrt{1-x^2}) + C. \end{aligned}$$

3.4 Integrace racionálních lomených funkcí

V této kapitole si ukážeme, jak integrovat racionální lomené funkce, tj. takové funkce, které je možno psát jako podíl dvou polynomů:

$$R(x) \equiv \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

kde $P_n(x) \equiv a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ a $Q_m(x) \equiv b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$ ($a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$).

Nejdříve vyřešíme několik speciálních příkladů, v nichž se soustředíme na racionální lomené funkce s lineárním dvojčlenem či kvadratickým trojčlenem ve jmenovateli. Jejich výsledky nakonec použijeme při formulaci obecného návodu, jak integrovat racionální lomenou funkci obecného tvaru.

Integrace racionální lomené funkce s lineárním dvojčlenem ve jmenovateli

Příklad 1a

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C,$$

$$a \neq 0$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \left[\begin{matrix} y = ax+b \\ dy = a dx \end{matrix} \right] = \frac{1}{a} \int \frac{1}{y} dy \Big|_{y=ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$$

Příklad 1b

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n} dx = \frac{1}{a} \frac{1}{1-n} (ax+b)^{1-n} + C,$$

$$a \neq 0, \quad n \neq 1$$

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n} dx = \left[\begin{array}{l} y = ax+b \\ dy = a dx \end{array} \right] = \frac{1}{a} \int \frac{1}{y^n} dy \Big|_{y=ax+b} = \frac{1}{a} \frac{1}{1-n} (ax+b)^{1-n} + C$$

Příklad 2

$$\int \frac{ax+b}{px+q} dx = \frac{a}{p} x + \frac{a}{p} \left(\frac{b}{a} - \frac{p}{p} \right) \ln \left| x + \frac{q}{p} \right| + C,$$

$$a \neq 0, \quad p \neq 0$$

$$\begin{aligned} \int \frac{ax+b}{px+q} dx &= \int \frac{a \left(x + \frac{b}{a} \right)}{p \left(x + \frac{q}{p} \right)} dx = \frac{a}{p} \int \frac{x + \frac{b}{a}}{x + \frac{q}{p}} dx = \frac{a}{p} \int \frac{x + \frac{q}{p} - \frac{q}{p} + \frac{b}{a}}{x + \frac{q}{p}} dx = \frac{a}{p} \int \left(1 + \frac{\frac{b}{a} - \frac{q}{p}}{x + \frac{q}{p}} \right) dx \\ &= \frac{a}{p} x + \frac{a}{p} \left(\frac{b}{a} - \frac{p}{p} \right) \int \frac{1}{x + \frac{q}{p}} dx = \frac{a}{p} x + \frac{a}{p} \left(\frac{b}{a} - \frac{p}{p} \right) \ln \left| x + \frac{q}{p} \right| + C \end{aligned}$$

Poznámka

Integrál z příkladu 2 můžeme převést přímo na integrál typu 1a, vydělíme-li polynom v čitateli jmenovatelem.

Integrace racionální lomené funkce s kvadratickým trojčlenem ve jmenovateli

Poznámka

Za podmínky $a \neq 0$ můžeme integrál $\int \frac{P_n(x)}{ax^2+bx+c} dx$ převést na formálně jednodušší integrál

$\int \frac{P_n(x)}{x^2+px+q} dx$.¹ Konkrétní postup při jeho výpočtu pak závisí na charakteru kořenů kvadratického trojčlenu

ve jmenovateli a na tvaru polynomu v čitateli integrandu. V následujících příkladech probíráme jednotlivě všechny možnosti, které mohou nastat.

¹ $\int \frac{P_n(x)}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{a} \int \frac{P_n(x)}{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} dx = \left[\begin{array}{l} p \equiv b/a \\ q \equiv c/a \end{array} \right] = \frac{1}{a} \int \frac{P_n(x)}{x^2+px+q} dx$. Nepodstatný multiplikativní faktor $1/a$

v dalším výkladu pochopitelně neuvažujeme.

Příklad 3a

dva jednoduché reálné kořeny x_1 a x_2

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \frac{1}{x_1 - x_2} \ln \left| \frac{x - x_1}{x - x_2} \right| + C,$$

Především můžeme psát $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$, a počítaný integrál proto přepsat do tvaru

$$\int \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} dx.$$

Dříve, než budeme pokračovat v integrování, upravíme racionální lomenou funkci do vhodnější podoby

$$\frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}.$$

Neznámé konstanty A a B získáme převedením výrazu na pravé straně rovnosti na společného jmenovatele a porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin čitatele takto získaného zlomku s čitatelem levé strany rovnosti:

$$\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} = \frac{(A + B)x - (Ax_2 + Bx_1)}{(x - x_1)(x - x_2)}.$$

Odtud vyplývá

$$\begin{aligned} A + B &= 0, \\ -(Ax_2 + Bx_1) &= 1, \end{aligned}$$

čili

$$A = \frac{1}{x_1 - x_2} \quad \text{a} \quad B = -\frac{1}{x_1 - x_2}.$$

Nyní tedy můžeme psát

$$\int \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} dx = \frac{1}{x_1 - x_2} \int \frac{1}{x - x_1} dx - \frac{1}{x_1 - x_2} \int \frac{1}{x - x_2} dx$$

a podle výsledku příkladu 1a nakonec i

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx \equiv \int \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} dx = \frac{1}{x_1 - x_2} \ln \left| \frac{x - x_1}{x - x_2} \right| + C.$$

Příklad 3bjeden dvojnásobný reálný kořen x_0

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = -\frac{1}{x - x_0} + C,$$

V tomto případě platí pro polynom ve jmenovateli $x^2 + px + q = (x - x_0)^2$, a další výpočet je proto přímočarý:

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx \equiv \int \frac{1}{(x - x_0)^2} dx = \left[\frac{y = x - x_0}{dy = dx} \right] = \int \frac{1}{y^2} dy \Big|_{y=x-x_0} = -\frac{1}{x - x_0} + C.$$

Příklad 3c

žádný reálný kořen

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{\Delta}} x + \frac{p}{2\sqrt{\Delta}} \right) + C,$$

$$\text{kde } \Delta \equiv q - p^2/4.$$

Podle předpokladu zřejmě platí $\Delta \equiv q - p^2/4 > 0$, a kvadratický trojčlen ve jmenovateli můžeme tedy doplnit na úplný čtverec

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4} \right) = \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + \Delta.$$

Pak můžeme ovšem psát

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + \Delta} dx &= \frac{1}{\Delta} \int \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta}} x + \frac{p}{2\sqrt{\Delta}} \right)^2 + 1} dx = \left[\frac{y = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} x + \frac{p}{2\sqrt{\Delta}}}{dy = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} dx} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int \frac{1}{y^2 + 1} dy \Big|_{y = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} x + \frac{p}{2\sqrt{\Delta}}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{\Delta}} x + \frac{p}{2\sqrt{\Delta}} \right) + C. \end{aligned}$$

Příklad 4

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx = \frac{a}{2} \left[\ln|x^2+px+q| + (c-p) \int \frac{1}{x^2+px+q} dx \right]$$

,

$a \neq 0$

Za předpokladu $a \neq 0$ je možno psát

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx = \frac{a}{2} \int \frac{2x+c}{x^2+px+q} dx ,$$

kde jsme zavedli $c = 2b/a$, a při dalších výpočtech se soustředit na jednodušší integrál na pravé straně:

$$\int \frac{2x+c}{x^2+px+q} dx = \int \frac{2x+p-p+c}{x^2+px+q} dx = \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + (c-p) \int \frac{1}{x^2+px+q} dx .$$

Úloha je tedy převedena na výpočet dvou nových integrálů. Druhý z nich počítáme pomocí postupů uvedených v příkladech 3a – 3c, při výpočtu prvního integrálu užijeme první věty o substituci

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx = \left[\begin{array}{l} y = x^2 + px + q \\ dy = (2x+p) dx \end{array} \right] = \int \frac{1}{y} dy \Big|_{y=x^2+px+q} = \ln|x^2+px+q| \quad (+C) .$$

Příklad 5¹

$$\int \frac{2x+c}{(x^2+px+q)^n} dx , \quad n \geq 2$$

Inspirování postupem uvedeným v příkladu 4 můžeme okamžitě psát

$$\int \frac{2x+c}{(x^2+px+q)^n} dx = \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} dx + (c-p) \int \frac{1}{(x^2+px+q)^n} dx .$$

I nyní je tedy úloha převedena na výpočet dvou nových integrálů. První z nich počítáme podobně jako v předcházejícím příkladě, tj. pomocí první věty o substituci

¹ Níže předpokládáme speciální tvar lineárního dvojčlenu ve jmenovateli. Poučení výpočty provedenými v příkladu 4 víme ale, že se tímto nijak neomezujeme co do obecnosti zadání.

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} dx = \left[\begin{array}{l} y = x^2 + px + q \\ dy = 2x + p \end{array} \right] = \int \frac{1}{y^n} dx \Big|_{y=x^2+px+q} = \frac{1}{1-n} (x^2 + px + q)^{1-n} + C.$$

Postup při výpočtu druhého integrálu závisí na tom, má-li kvadratický polynom ve jmenovateli reálné kořeny, či nikoliv. Pokud je má, a to navíc dva různé, musíme při výpočtu integrálu použít pravidlo 2 pro integrování obecné racionální lomené funkce uvedené níže v této kapitole. Pokud je kořen kvadratického polynomu reálný a dvojnásobný, přechází počítaný integrál na integrál z příkladu 1b.

Proveďme výpočet pro případ, kdy kvadratický výraz nemá reálné kořeny. Podobně jako v příkladu 3c i nyní pomůže doplnění kvadratického trojčlenu na úplný čtverec. Také další postup je zcela obdobný tomu, který jsme nastínili v příkladu 3c:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+px+q)^n} dx &= \int \frac{1}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \Delta\right]^n} dx = \frac{1}{\Delta^n} \int \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta}}x + \frac{p}{2\sqrt{\Delta}}\right)^2 + 1\right]^n} dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} y = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}x + \frac{p}{2\sqrt{\Delta}} \\ dy = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} dx \end{array} \right] = \frac{1}{\Delta^{n-1/2}} \int \frac{1}{(y^2+1)^n} dy \Big|_{y=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}x+\frac{p}{2\sqrt{\Delta}}} \end{aligned}$$

Integrál $\int 1/(y^2+1)^n dy$ počítáme nejsnadněji pomocí rekurentního vzorce (viz kapitola [o]).

Poznámka

Integrál racionální lomené funkce s kvadratickým trojčlenem ve jmenovateli a polynomem třetího nebo vyššího řádu v čitateli můžeme vždy převést dělením těchto polynomů na součet integrálu polynomu a některého z integrálů probíraných v příkladech 3a – 3c či 4.

Integrace obecné racionální lomené funkce

V závěru této kapitoly formulujeme obecná pravidla pro výpočet integrálů racionální lomené funkce za předpokladu, že stupeň polynomu v čitateli je menší než stupeň polynomu ve jmenovateli¹. Níže tedy předpokládáme, že pro $R(x) = P_n(x)/Q_m(x)$ platí vždy $n < m$.

Pravidlo 1

Má-li polynom $Q_m(x)$ pouze jednoduché reálné kořeny, tj. $Q_m(x) = b_m(x-x_1)\dots(x-x_m)$, je výhodné integrovanou funkci psát ve tvaru²

$$R(x) = \frac{1}{b_m} \left(\frac{A_1}{x-x_1} + \dots + \frac{A_m}{x-x_m} \right),$$

kde zatím neznámé reálné konstanty $A_1, \dots, A_m$ nalezneme tak, že pravou stranu rovnosti převedeme na společného jmenovatele a takto získané koeficienty u jednotlivých mocnin x

¹ Protože obecná racionální lomená funkce může být vždy převedena dělením polynomů v čitateli a jmenovateli na součet polynomu a jiné racionální lomené funkce, která již uvedený předpoklad splňuje, je možno níže uvedených pravidel použít i ve zcela obecném případě.

² O rozkladech uvedených v pravidlech 1-3 se obvykle hovoří jako o rozkladech racionální lomené funkce na **parciální zlomky**.

v čitateli porovnáme s odpovídajícími koeficienty polynomu $P_n(x)$.¹ Výpočet integrálu $\int R(x)dx$ je pak převeden na výpočet integrálů z příkladu 1a.

Pravidlo 2

Má-li polynom $Q_m(x)$ pouze reálné, obecně však násobné kořeny, tj. platí-li

$$Q_m(x) = b_m (x - x_1)^{m_1} \dots (x - x_r)^{m_r}, \quad \sum_{k=1}^r m_k = m,$$

rozložíme integrovanou funkci do tvaru

$$R(x) = \frac{1}{b_m} \left(\frac{A_{1,1}}{x - x_1} + \dots + \frac{A_{1,m_1}}{(x - x_1)^{m_1}} + \dots + \frac{A_{r,1}}{x - x_r} + \dots + \frac{A_{r,m_r}}{(x - x_r)^{m_r}} \right),$$

kde neznámé reálné konstanty $A_{1,1}, \dots, A_{r,m_r}$ nalezneme opět tak, že pravou stranu rovnosti převedeme na společného jmenovatele a takto získané koeficienty u jednotlivých mocnin x v čitateli porovnáme s odpovídajícími koeficienty polynomu $P_n(x)$. Výpočet integrálu $\int R(x)dx$ je takto převeden na výpočet integrálů z příkladů 1a a 1b.

Pravidlo 3

Má-li polynom $Q_m(x)$ reálné i imaginární, obecně však násobné kořeny, můžeme jej psát ve tvaru

$$Q_m(x) = b_m (x - x_1)^{m_1} \dots (x - x_r)^{m_r} (x^2 + p_1 x + q_1)^{n_1} \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{n_s},$$

kde uvedené kvadratické polynomy jsou již nerozložitelné. Pak je ovšem výhodné rozložit integrovanou funkci podle vzorce

$$R(x) = \frac{1}{b_m} \left[\frac{A_{1,1}}{x - x_1} + \dots + \frac{A_{1,m_1}}{(x - x_1)^{m_1}} + \dots + \frac{A_{r,1}}{x - x_r} + \dots + \frac{A_{r,m_r}}{(x - x_r)^{m_r}} + \right. \\ \left. + \frac{C_{1,1}x + B_{1,1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)} + \dots + \frac{C_{1,n_1}x + B_{1,n_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{n_1}} + \dots + \frac{C_{s,1}x + B_{s,1}}{(x^2 + p_s x + q_s)} + \dots + \frac{C_{s,n_s}x + B_{s,n_s}}{(x^2 + p_s x + q_s)^{n_s}} \right],$$

kde reálné konstanty A_{ij} , B_{kl} a C_{pq} opět nalezneme tak, že pravou stranu rovnosti převedeme na společného jmenovatele a takto získané koeficienty u jednotlivých mocnin x porovnáme s odpovídajícími koeficienty polynomu $P_n(x)$. Výpočet integrálu $\int R(x)dx$ takto převádíme na výpočet integrálů z příkladů 1-5.

¹ Srovnejte s příkladem 3a v této kapitole.

3.5 Vybrané speciální integrály

Poměrně velké množství na první pohled komplikovaných integrálů je možno vhodně zvolenými substitucemi převést na integraci racionální lomené funkce, kterou jsme podrobně probrali v předcházející kapitole. Niže shrnujeme některé z těchto velmi užitečných a často používaných substitucí, jiné je možno nalézt ve všech pokročilých učebnicích a příručkách věnovaných integrálnímu počtu (viz např. [2], [4] a [5]).

Definice

Pod **polynomem dvou proměnných** $P(x, y)$ rozumíme konečný součet sčítanců typu $a_{pq}x^p y^q$, kde p a q jsou přirozená čísla nebo nula,

$$P(x, y) \equiv \sum_{p, q} a_{pq} x^p y^q.$$

Pod **racionální lomenou funkcí dvou proměnných** $R(x, y)$ rozumíme podíl dvou polynomů dvou proměnných

$$R(x, y) \equiv \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}.$$

Poznámka

Následující tabulka shrnuje některé speciální typy neurčitých integrálů, které je možno pomocí uvedených substitucí převést na integrály racionální lomené funkce.

Integrál	Omezující podmínky	Substituce
$\int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$	$s > 1$, $ad - bc \neq 0$ ⁽¹⁾	$t = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$
$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$	$a < 0$, $b^2 - 4ac > 0$ ⁽²⁾	$t = \sqrt{\frac{x-x_1}{x_2-x}}$ ⁽³⁾
$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$	$a > 0$, $b^2 - 4ac \neq 0$ ⁴	$t = \sqrt{ax^2 + bx + c} - x\sqrt{a}$ nebo $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + x\sqrt{a}$ ⁵
$\int R(\cos x, \sin x) dx$		$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right), x \neq k\pi$

¹ Je-li $ad - bc = 0$, je výraz pod odmocninou konstantní (dokažte) a úloha se mění na problém integrace prosté racionální lomené funkce.

² V případě nulového či záporného diskriminantu kvadratického výrazu pod odmocninou je tento výraz definován v jediném bodě reálné osy či dokonce není definován vůbec.

³ x_1, x_2 jsou kořeny kvadratického výrazu $ax^2 + bx + c$.

⁴ Je-li diskriminant kvadratického výrazu pod odmocninou nulový, je možno provést naznačené odmocnění a úloha přechází na integraci racionální lomené funkce.

⁵ Je-li $ad - bc > 0$, můžeme též použít substituce $t = \sqrt{\frac{x-x_1}{x-x_2}}$, kde x_1 a x_2 jsou kořeny kvadratického polynomu pod odmocninou.

$\int R(e^x) dx$		$t = e^x$
$\int R(\ln x) \frac{dx}{x}$		$t = \ln x$

Poznámka

Substituce v integrálu $\int R(\cos x, \sin x) dx$ podle návodu z výše uvedené tabulky vyžaduje provedení následujících náhrad¹

$$\cos x \rightarrow \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x \rightarrow \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{a} \quad dx \rightarrow \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Protože tato substituce vede velmi často k neúměrně komplikovaným výrazům v integrandu počítaného integrálu, užívají se obvykle v níže uvedených speciálních případech substituce jiné: platí-li² $R(-x, y) = -R(x, y)$, je doporučována substituce $t = \cos x$,

- platí-li $R(x, -y) = -R(x, y)$, je výhodné použít substituce $t = \sin x$,
- platí-li $R(-x, -y) = R(x, y)$, položíme s výhodou $t = \operatorname{tg} x$.

3.6 Určité integrály

Newtonův určitý integrál

Definice

Nechť $F(x)$ je na intervalu I primitivní funkce k funkci $f(x)$. *Newtonovým určitým integrálem* funkce f od a do b ³ ($a, b \in I$) nazveme číslo $F(b) - F(a)$.

Poznámka

Určitý integrál označujeme obvykle symbolem

$$\int_a^b f(x) dx,$$

kde číslo b nazýváme *horní mezí* a číslo a *dolní mezí* tohoto integrálu.

Pro rozdíl funkčních hodnot primitivní funkce F v krajních bodech integračního oboru se často používá zápis

$$[F(x)]_a^b \equiv F(b) - F(a).$$

Poznámka

Všimněte si, že ačkoli primitivní funkce $F(x)$ není určena jednoznačně, určitý integrál $\int_a^b f(x) dx$ již jednoznačně určen je.

¹ Podrobnosti nalezne čtenář např. ve starší, leč vynikající základní učebnici Havlíčkové [2] nebo v pokročilé učebnici Jarníkové [4].

² pro všechna x a y z definičního oboru R

³ a a b jsou reálná čísla.

Věta

Funkce $G(x) \equiv \int_a^x f(\xi) d\xi$ je jednou z primitivních funkcí k funkci $f(x)$.¹ Platí tedy

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(\xi) d\xi.$$

Věta

Pro počítání s určitými Newtonovými integrály platí následující pravidla:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= - \int_b^a f(x) dx, \\ \int_a^a f(x) dx &= 0, \\ \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx. \end{aligned}$$

Věta

Nechť pro každé x z intervalu $\langle a, b \rangle$ platí $f(x) \geq g(x)$. Pak

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Speciálně, je-li na intervalu $\langle a, b \rangle$ $f(x) \geq 0$, můžeme psát

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Poznámka

Při výpočtu určitého Newtonova integrálu hledáme obvykle nejdříve primitivní funkci k zadané funkci $f(x)$.² Můžeme proto využít všech pravidel a vět, které jsou pro výpočet neurčitých integrálů (součtový vzorec, integrace per partes, substituce) formulovány v předcházejících kapitolách.

Riemannův určitý integrál**Definice**

Nechť $\langle a, b \rangle$ je uzavřený interval a čísla $x_0, x_1, \dots, x_n$ splňují podmínku $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Pak uspořádanou množinu těchto čísel $D \equiv \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ nazveme **dělením intervalu** $\langle a, b \rangle$. Největší z čísel $|x_i - x_{i-1}|$, $i = 1, \dots, n$, nazveme **normou dělení** D a budeme pro ně užívat označení $\nu(D)$.

Definice

Nechť $D \equiv \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ je dělení uzavřeného intervalu $\langle a, b \rangle$, $\xi \equiv \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ množina

¹ Tato primitivní funkce splňuje navíc i podmínku $G(a) = 0$.

² Někdy můžeme výsledek odhadnout přímo. Tak např. $\int_a^a f(x) dx$ je pro lichou funkci vždy nulový.

reálných čísel splňujících pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ a f omezená funkce na $\langle a, b \rangle$ ¹. Pak součet

$$S(f, D, \xi) \equiv \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

nazveme **Riemannovou integrální sumou** funkce f pro dělení D a množinu čísel ξ .

Definice

Nechť D_N je posloupnost dělení intervalu $\langle a, b \rangle$, jejichž norma konverguje k nule, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu(D_N) = 0$, a ξ_N posloupnost množin čísel $\{\xi_1^{(N)}, \dots, \xi_n^{(N)}\}$ z předcházející definice přiřazených dělením D_N . Funkce $f(x)$ nechť je definována a omezená na intervalu $\langle a, b \rangle$. Existuje-li pro všechny takové posloupnosti jejich společná limita²

$$I = \lim_{N \rightarrow +\infty} S(f, D_N, \xi_N),$$

nazveme tuto limitu **Riemannovým určitým integrálem** funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ ³.

Poznámka

Pro Riemannův určitý integrál budeme z důvodů, které objasníme níže, užívat stejné označení jako pro integrál Newtonův, tj. $\int_a^b f(x) dx$.

Poznámka

Podle předcházející definice umíme určit Riemannův integrál jen pro $a < b$. Definujme proto dále

$$\int_a^b f(x) dx \equiv - \int_b^a f(x) dx \text{ pro } b < a,$$

$$\int_a^a f(x) dx \equiv 0.$$

Věta

Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak existuje na tomto intervalu její Newtonův i Riemannův určitý integrál a oba jsou si rovny.

Poznámka

Předcházející věta ukazuje souvislost mezi Newtonovým a Riemannovým určitým integrálem pro jeden speciální typ funkcí - funkce spojitě. Platí i obecnější tvrzení, že pokud pro danou funkci existují na intervalu $\langle a, b \rangle$ oba určité integrály (Newtonův i Riemannův), jsou si navzájem rovny. Proto se pro Newtonův a Riemannův integrál používá obvykle stejného označení. Důležitým důsledkem této věty je

Věta

Funkce f , která je spojitá na $\langle a, b \rangle$, má na (a, b) primitivní funkci. Pro pevně zvolené, lež libovolné $c \in \langle a, b \rangle$ je $F(x) \equiv \int_c^x f(\xi) d\xi$ jednou z těchto primitivních funkcí.

¹ Tj. existuje takové nezáporné číslo K , že pro každé x z intervalu $\langle a, b \rangle$ platí $|f(x)| \leq K$.

² Viz Appendix A3.

³ Definice Riemannova integrálu je inspirována praktickou úlohou výpočtu plochy pod grafem zadané funkce. Podrobněji o tomto však až v kapitole věnované aplikacím integrálního počtu.

3.7 Nevlastní integrály

V předcházející kapitole jsme se naučili počítat určité Newtonovy a Riemannovy integrály na intervalech konečné délky. V aplikacích se však často vyskytne problém, kdy je třeba zadanou funkci integrovat přes interval, jehož jedna, či dokonce obě meze jsou nekonečné. V následujícím výkladu si ukážeme, jak se dá pojem určitého integrálu rozšířit i na intervaly nekonečné délky. V takovém případě pak obvykle hovoříme o *integrálech nevlastních*. V předcházející kapitole definované určité integrály pak, je-li to nutné v zájmu odlišení, nazýváme *integrály vlastními*.

Definice

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \equiv \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx ,$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx \equiv \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx .$$

Poznámka

Předpokládáme ovšem, že integrály i obě limity na pravé straně výše uvedených definičních rovností existují. Připouštíme přitom limity vlastní i nevlastní.

Máme-li navíc výše na mysli Newtonovy určité integrály, můžeme uvedené definiční rovnosti přepsat do tvaru ¹

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \equiv \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a) ,$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx \equiv F(b) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) .$$

Věta

Pro výše definované nevlastní integrály platí

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx ,$$

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^a f(x) dx ,$$

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = - \int_{+\infty}^a f(x) dx ,$$

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = - \int_a^{-\infty} f(x) dx .$$

Definice

Dále definujeme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \equiv \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx ,$$

kde a je libovolné reálné číslo.

Poznámka

Podle věty předcházející právě uvedené definici nezávisí pravá strana v této definici na volbě čísla a . Toto číslo je tedy skutečně libovolné.

¹ $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$.

Poznámka

Občas se setkáváme se situací, kdy primitivní funkce $F(x)$ existuje na celém otevřeném intervalu (a, b) , v samotných krajních bodech a a b však definována není, ač obě čísla mohou být konečná. Pak ovšem nelze použít definici Newtonova určitého integrálu v obvyklém tvaru

$$\int_a^b f(x) dx \equiv F(b) - F(a).$$

Inspirováni výkladem o nevlastních integrálech na nekonečných intervalech však snadno nahlédneme možnost, jak se s tímto problémem vypořádat. Stačí výše uvedenou definici přepsat do tvaru

$$\int_a^b f(x) dx \equiv \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x),$$

který je již možno použít bez ohledu na to, zda jsou meze a a b konečné či nikoliv a zda je v nich primitivní funkce $F(x)$ definována¹. I v takovém případě hovoříme obvykle o nevlastním integrálu.

Pro konečné meze a a b a existující funkční hodnoty $F(a)$ a $F(b)$ přechází zobecněná definice (nevlastního) určitého integrálu na definici původní. Primitivní funkce je totiž v tomto případě na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá, a platí tudíž $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x) = F(b)$ a $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(a)$.

3.8 Numerický výpočet určitých integrálů

Mnoho funkcí, s nimiž se setkáváme v přírodovědných a technických aplikacích, nelze integrovat jednoduchými analytickými metodami uváděnými v tomto textu. Při výpočtu takových integrálů se obvykle uchylujeme k numerickým metodám. Ústřední myšlenka numerického přístupu spočívá v náhradě integrované funkce funkcí jinou, zpravidla mnohem jednodušší, kterou již integrovat umíme. Přibližnou náhradou se pochopitelně dopouštíme chyby, kterou však většinou umíme učinit zanedbatelně malou.

Numerické integraci je věnováno významné místo v matematické literatuře. V této kapitole zmíníme jen některé základní metody a omezíme se při tom na výpočet vlastního integrálu $\int_a^b f(x) dx$, kde a i b jsou reálná čísla. Zájemce o hlubší proniknutí do problematiky odkazujeme na specializovanou literaturu (viz např. [4] a [5]).

Obdélníková metoda

Interval $\langle a, b \rangle$ rozdělíme na n stejných dílků s dělicími body $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, kde pro $k = 0, \dots, n-1$

$$x_k = a + k \frac{b-a}{n}.$$

Na každém z dělicích intervalů $\langle x_k, x_{k+1} \rangle$, $k = 0, \dots, n-1$, nahradíme funkci f funkcí konstantní, y_k . Obvykle se používá některá z následujících možností

- $y_k = f(x_k),$
- $y_k = \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2},$
- $y_k = f(x_{k+1}),$
- $y_k = f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right).$

¹ Musíme ovšem zaručit existenci příslušných jednostranných limit.

Novou, po částech konstantní funkci pak již snadno integrujeme a dostáváme

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_k.$$

Lichoběžníková metoda

I zde, stejně jako v případě metody obdélníkové, rozdělíme nejdříve interval $\langle a, b \rangle$ na n stejných dílků. Na každém z dělicích intervalů $\langle x_k, x_{k+1} \rangle$ nahradíme integrovanou funkci funkcí lineární, jejíž graf prochází body $[x_k, f(x_k)]$ a $[x_{k+1}, f(x_{k+1})]$. Novou, nyní po částech lineární funkci opět snadno integrujeme a dostáváme

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{1}{2} y_0 + \sum_{k=1}^{n-1} y_k + \frac{1}{2} y_n \right).$$

Simpsonova metoda

Interval $\langle a, b \rangle$ rozdělíme v tomto případě na **sudý počet** stejných dílků a na intervalech $\langle x_0, x_2 \rangle$, $\langle x_2, x_4 \rangle$, ... a $\langle x_{n-2}, x_n \rangle$ nahradíme tentokrát původní funkci f funkcemi kvadratickými, jejichž grafy procházejí na prvním intervalu body $[x_0, f(x_0)]$, $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_2, f(x_2)]$, na druhém intervalu body $[x_2, f(x_2)]$, $[x_3, f(x_3)]$ a $[x_4, f(x_4)]$ atd. Novou, v tomto případě po částech kvadratickou funkci integrujeme a dostáváme

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{3} \frac{b-a}{n} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Poznámka

Pro každou z uvedených metod získáváme zpravidla tím přesnější výsledek, čím je dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ jemnější, a tedy počet dělicích bodů větší. I přesnost uvedených metod roste obvykle při stejném n v pořadí, v němž jsou uvedeny. Nejméně přesná je metoda obdélníková, nejpřesnější metoda Simpsonova.

3.9 Vybrané aplikace integrálního počtu

V matematice, ale zejména v přírodních a technických vědách, existuje nepřeberné množství problémů, kdy je nutné tím či oním způsobem použít výsledků integrálního počtu. V této kapitole uvádíme stručný přehled těch nejběžnějších aplikací určitých integrálů v geometrii a fyzice.

Při řešení jednotlivých konkrétních úloh využijeme vždy elementárních znalostí (např. toho, že umíme vypočítat plochu obdélníka, délku úsečky, objem válce, povrch rotačního komolého kužele, hmotnost úsečky s konstantní lineární hustotou, práci konstantní síly na přímočaré dráze atd.) Postup při řešení složitějších úloh je pak následující:

- Obecný problém převedeme na řešení některé z uvedených elementárních úloh a získáme tak zpravidla přibližné vyjádření obecného vztahu ve tvaru Riemannovy sumy pro nějaký určitý integrál.
- Dále budeme předpokládat, že takto získaná Riemannova suma konverguje ke svému integrálu, který pak již snadno zapíšeme, užijeme-li definice uvedené v kapitole 3.6.

Upozorňujeme čtenáře, že v zájmu zachování jednoduchosti a názornosti jsou níže naznačené výpočty pouze orientační a nelze je v žádném případě považovat za důkazy uvedených vzorců. Zájemce o podrobnosti odkazujeme na kteroukoliv učebnici integrálního počtu, např. na učebnici Havlíčkovu [2] či Jarníkovu [4].

Úloha 1***Plocha pod grafem funkce*****Zadání**

Určete plošný obsah S oblasti vymezené na intervalu $\langle a, b \rangle$ grafem funkce $f(x) \geq 0$ a přímkami $x = a$, $x = b$ a $y = 0$.¹

Řešení

Budiž $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ dostatečně jemné dělení intervalu $\langle a, b \rangle$. Elementární plochy pod grafem funkce $f(x)$ nahradíme na každém z dělicích intervalů $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ obdélníky o stranách $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ a $\Delta y_i = f(\xi_i)$, kde $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$. Hledaný plošný obsah S je pak dán s přibližnou platností jako součet plošných obsahů jednotlivých elementárních obdélníků $\Delta S_i = \Delta y_i \Delta x_i$:

$$S \approx \sum_i \Delta S_i = \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Na pravé straně poslední rovnosti jsme ale takto získali Riemannovu integrální sumu, které při splnění nezbytných předpokladů (viz kapitola 3.6) odpovídá integrál $\int_a^b f(x) dx$. Můžeme proto psát

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Úloha 2***Délka oblouku grafu funkce*****Zadání**

Určete délku L oblouku grafu funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Řešení

I v tomto případě rozdělíme interval $\langle a, b \rangle$ dostatečně jemným dělením $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ a elementy grafu funkce $f(x)$ na každém z dělicích intervalů $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ nahradíme s přibližnou platností úsečkami o koncových bodech $[x_{i-1}, f(x_{i-1})]$ a $[x_i, f(x_i)]$. Hledanou délku oblouku L pak získáme přibližně jako součet délek jednotlivých elementárních úseček $\Delta L_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$, kde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ a $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Platí tedy

¹ Samostatně se pokuste zformulovat řešení podobné úlohy, v níž ale budeme předpokládat, že $f(x) < 0$, nebo dokonce že funkce f mění na intervalu $\langle a, b \rangle$ znaménko.

$$L \approx \sum_i \Delta L_i = \sum_i \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sum_i \sqrt{\Delta x_i^2 + f'(\xi_i)^2 \Delta x_i^2} = \sum_i \sqrt{(1 + f'(\xi_i)^2) \Delta x_i},$$

kde jsme užili Lagrangeovu větu o přírůstku¹ a kde $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Výsledkem našeho přibližného výpočtu je opět jistá Riemannova suma, které tentokrát odpovídá integrál $\int_a^b \sqrt{(1 + f'(x)^2)} dx$. Můžeme proto psát

$$L = \int_a^b \sqrt{(1 + f'(x)^2)} dx.$$

Úloha 3

Délka parametricky zadané křivky

Zadání

Určete délku L křivky zadané v rovině parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, kde parametr $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ a vektorová funkce $\Phi(t) \equiv [\varphi(t), \psi(t)]$ je prostá na $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Řešení

Postup řešení je obdobný tomu, který jsme nastínili v předcházející úloze. Interval $\langle \alpha, \beta \rangle$ nejdříve rozdělíme dostatečně jemným dělením $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ a na každém z dělících intervalů $\langle t_{i-1}, t_i \rangle$ považujeme křivku s přibližnou platností za úsečku s koncovými body $[\varphi(t_{i-1}), \psi(t_{i-1})]$ a $[\varphi(t_i), \psi(t_i)]$. I nyní počítáme v prvním přiblížení délku oblouku L jako součet délek těchto elementárních úseček $\Delta L_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$, kde $\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$ a $\Delta y_i = \psi(t_i) - \psi(t_{i-1})$. Platí tedy³

$$L \approx \sum_i \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sum_i \sqrt{\varphi'(\tau_i)^2 \Delta t_i^2 + \psi'(\tilde{\tau}_i)^2 \Delta t_i^2} = \sum_i \sqrt{(\varphi'(\tau_i)^2 + \psi'(\tilde{\tau}_i)^2) \Delta t_i},$$

kde $\tau_i, \tilde{\tau}_i \in (t_{i-1}, t_i)$. Protože τ_i a $\tilde{\tau}_i$ jsou obecně různá, nezískali jsme v tomto případě „čistou“ Riemannovu integrální sumu. Přesto je však možno ukázat, že platí (viz např. učebnice Havlíčkova [2])

¹ Tato věta říká, že je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a diferencovatelná na (a, b) , pak existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$. Podrobnosti může čtenář najít v každé učebnici diferenciálního počtu (viz například Havlíček [1] nebo Jarník [3]).

² Křivka tedy v žádném bodě neprotíná sama sebe, nanejvýš může mít stejný počáteční a koncový bod.

³ V úpravách opět využíváme výše zmíněnou Lagrangeovu větu o přírůstku: $\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i)(t_i - t_{i-1})$ a $\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) = \psi'(\tilde{\tau}_i)(t_i - t_{i-1})$. Všimněte si, že body v nichž počítáme derivace jsou pro φ a ψ různé.

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Poznámka

Obdobný vzorec lze odvodit i pro křivku zadanou parametrickými rovnicemi v prostoru $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ a $z = \zeta(t)$:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\zeta'(t))^2} dt.$$

Úloha 4***Objem rotačních těles*****Zadání**

Určete objem V tělesa, které vznikne rotací plochy pod grafem funkce $f(x) \geq 0$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ kolem osy x .

Řešení

Interval $\langle a, b \rangle$ opět nejdříve rozdělíme dostatečně jemným dělením $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ a elementární rotační tělesa, která vzniknou výše popsaným postupem na každém z dělicích intervalů $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, považujeme za válce. Hledaný objem V pak získáme jako součet objemů těchto elementárních válců o poloměrech podstavy $r_i = f(\xi_i)$, kde ξ_i je nějaké číslo z $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, a o výškách $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Můžeme tedy psát

$$V \approx \sum_i \Delta V_i = \sum_i \pi f(\xi_i)^2 \Delta x_i$$

a nakonec i

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx.$$

Úloha 5***Povrch rotačních těles*****Zadání**

Určete plošný obsah S povrchu tělesa, které vznikne rotací grafu funkce $f(x) \geq 0$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ kolem osy x .

Řešení

Postup při řešení je beze zbytku stejný jako v předcházející úloze, pouze elementární rotační tělesa považujeme nyní s přibližnou přesností za komolé kužele. Celkový plošný obsah S pak určíme jako součet plošných obsahů jednotlivých elementárních kuželů

$$\Delta S_i = \pi (r_i^{(1)} + r_i^{(2)}) \Delta l_i,$$

kde $r_i^{(1)}$ je poloměr jedné podstavy i -tého kužele, $r_i^{(1)} = f(x_{i-1})$, $r_i^{(2)}$ poloměr jeho druhé podstavy, $r_i^{(2)} = f(x_i)$, a Δl_i délka jeho strany, $\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$. Můžeme proto psát¹

$$S \approx \sum_i \Delta S_i = \pi \sum_i [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = 2\pi \sum_i f(x_i) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x_i$$

a nakonec i

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Úloha 6***Hmotnost nekonečně tenké rovné tyče*****Definice**

Nekonečně tenkou tyč reprezentujeme úsečkou (uzavřeným intervalem) $\langle a, b \rangle$ na ose x . Označme $\Delta m(x, \Delta x)$ hmotnost jejího segmentu $\langle x, x + \Delta x \rangle$. Pak **lineární hustotou tyče** v bodě x nazveme veličinu

$$\rho(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m(x, \Delta x)}{\Delta x}.$$

Zadání

Určete hmotnost m nekonečně tenké tyče $\langle a, b \rangle$ se zadanou lineární hustotou $\rho(x)$.

Řešení

Interval $\langle a, b \rangle$ rozdělíme dostatečně jemným dělením $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ a na každém z dělicích intervalů $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ považujeme hustotu $\rho(x)$ za konstantní. Pak ovšem můžeme pro hmotnost každého segmentu psát přibližně $\Delta m_i \approx \rho(\xi_i) \Delta x_i$, kde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ a $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, a pro hmotnost celé tyče

$$m = \sum_i \Delta m_i \approx \sum_i \rho(\xi_i) \Delta x_i$$

nebo též

$$m = \int_a^b \rho(x) dx.$$

¹ Opět s využitím Lagrangeovy věty o přírůstku.

Úloha 7

Hmotnost nekonečně tenkého vlákna

Definice

Nekonečně tenké vlákno reprezentujeme v rovině parametricky zadanou křivkou $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, kde parametr $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ a vektorová funkce $\phi(t) \equiv [\varphi(t), \psi(t)]$ je prostá na $\langle \alpha, \beta \rangle$ ¹. Označme $\Delta m(t, \Delta t)$ hmotnost malé části vlákna, pro kterou parametr nabývá hodnot z intervalu $\langle t, t + \Delta t \rangle$. Pak **lineární hustotou vlákna** v bodě odpovídající hodnotě parametru t nazveme veličinu²

$$\rho(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m(t, \Delta t)}{\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} \Delta t}.$$

Zadání

Určete hmotnost m nekonečně tenkého vlákna se zadanou lineární hustotou $\rho(t)$.

Řešení

Interval $\langle \alpha, \beta \rangle$ opět nejdříve rozdělíme dostatečně jemným dělením a hustotu $\rho(t)$ považujeme na každém takto získaném segmentu za konstantní. Potom ovšem můžeme psát³

$$m \approx \sum_i \rho(\tau_i) \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sum_i \rho(\tau_i) \sqrt{\varphi'(\tilde{\tau}_i)^2 + \psi'(\tilde{\tau}_i)^2} \Delta t_i,$$

kde τ_i , $\tilde{\tau}_i$ i $\hat{\tau}_i$ jsou obecně různá čísla z i -tého dělicího intervalu. Podobně jako v úloze 3 nedospíváme sice takto k „čistou“ Riemannově integrální sumě, opět lze však dokázat, že platí

$$m = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t) \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt.$$

Poznámka

Pro vlákno v prostoru s parametrizací $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ a $z = \zeta(t)$ je možno odvodit obdobný vzorec

$$m = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t) \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \zeta'(t)^2} dt.$$

¹ Vlákno tedy v žádném bodě neprotíná samo sebe, nanejvýš může mít tvar uzavřené smyčky.

² Všimněte si, že ve jmenovateli uvedené definiční rovnosti stojí přibližný výraz pro délku části vlákna na intervalu $\langle t, t + \Delta t \rangle$.

³ Opět s využitím Lagrangeovy věty o přírůstku.

Úloha 8***Práce vnější síly na přímé dráze*****Zadání**

Určete práci A vykonanou silou $F(x)$ působící ve směru přímočarého pohybu hmotného bodu po úsečce reprezentované intervalem $\langle a, b \rangle$ osy x .

Řešení

I v tomto případě rozdělíme nejdříve interval $\langle a, b \rangle$ dostatečně jemným dělením $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ a na každém z dělicích intervalů $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ považujeme působící sílu za konstantní. Obdobně jako v předcházejících úlohách pak píšeme

$$A = \sum_i \Delta A_i \approx \sum_i F(\xi_i) \Delta x_i,$$

kde ΔA_i je práce vykonaná působící silou na segmentu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$. Platí tedy

$$A = \int_a^b F(x) dx.$$