

2 Diferenciální počet funkcí více reálných proměnných

2.1 Spojitost, limity a parciální derivace

Funkce více reálných proměnných

Definice

Pod reálnou *funkcí n reálných proměnných* rozumíme zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, kde n je přirozené číslo, $n > 1$.

Poznámka

Zápis funkční hodnoty $f(x_1, \dots, x_n)$ budeme často používat ve zkrácené formě $f(\mathbf{x})$, kde $\mathbf{x} \equiv [x_1, \dots, x_n]$.

Poznámka

V přírodovědných a technických aplikacích bývá často $n = 2$, $n = 3$ nebo $n = 4$. Pak hovoříme o reálné *funkci dvou, tří resp. čtyř reálných proměnných*.

Definice

Pod Δ -*okolím* bodu $\mathbf{a} \equiv [a_1, \dots, a_n]$ rozumíme množinu $K_\Delta(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \Delta\}$ ¹, kde symbolem $\|\cdot\|$ označujeme eukleidovskou normu². *Redukované Δ -okolí* bodu $\mathbf{a}$ je rovno příslušnému Δ -okolí bez bodu $\mathbf{a}$.

Spojitost

Definice

Nechť je funkce $f(\mathbf{x})$ definována na okolí bodu $\mathbf{a}$. Řekneme, že je tato funkce *spojitá* v bodě $\mathbf{a}$, právě když

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \mathbf{x} \in D_f \text{ platí } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon.$$

Limity

Definice

Nechť je funkce $f(\mathbf{x})$ definována na nějakém redukovaném okolí bodu $\mathbf{a}$. Řekneme, že tato funkce má v uvedeném bodě *vlastní limitu* A , právě když

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \mathbf{x} \in D_f \text{ platí } 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon.$$

Používáme stručný zápis $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = A$.

¹ Vnitřek koule o poloměru Δ se středem v bodě $\mathbf{a}$.

² $\|\mathbf{b}\| \equiv \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$.

Definice

Nechť je funkce $f(\mathbf{x})$ definována na nějakém redukováném okolí bodu $\mathbf{a}$. Řekneme, že tato funkce má v uvedeném bodě **nevlastní limitu** $+\infty$, právě když

$$\forall K > 0 \exists \delta > 0 : \forall \mathbf{x} \in D_f \text{ platí } 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow f(\mathbf{x}) > K.$$

Dále řekneme, že funkce f má v bodě $\mathbf{a}$ **nevlastní limitu** $-\infty$, právě když

$$\forall K < 0 \exists \delta > 0 : \forall \mathbf{x} \in D_f \text{ platí } 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow f(\mathbf{x}) < K.$$

V případě nevlastních limit používáme stručný zápis $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \pm \infty$.

Poznámka

Limity v nevlastních bodech ani jednostranné limity nejsou pro funkce více reálných proměnných definovány.

Věta (algebra limit)

Pro limity reálných funkcí více reálných proměnných platí stejná tvrzení o algebře limit, jaká jsme zformulovali pro funkce jedné reálné proměnné:

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) &= \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) + \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}), \\ \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})) &= \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) - \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}), \\ \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})) &= \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \cdot \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}), \\ \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f(\mathbf{x}) / g(\mathbf{x})) &= \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) / \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

pokud ovšem mají pravé strany uvedených rovností smysl.

Parciální derivace**Definice**

Nechť je funkce $f(\mathbf{x})$ definována na nějakém okolí bodu $\mathbf{a}$. **Parciální derivací** funkce f podle proměnné x_k v bodě $\mathbf{a}$ nazveme

$$\lim_{x_k \rightarrow a_k} \frac{f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{x_k - a_k}.$$

Užíváme pro ni zpravidla označení $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a})$.

Poznámka

Výpočet parciální derivace podle proměnné x_k v bodě $\mathbf{a}$ odpovídá výpočtu obyčejné derivace nové funkce jedné reálné proměnné $\tilde{f}(x_k) \equiv f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$. Kromě vybrané považujeme tedy během výpočtu všechny zbývající proměnné za konstanty.

Věta (algebra derivací)

Pokud mají pravé strany rovností smysl, platí

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x_k}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) + \frac{\partial g}{\partial x_k}(\mathbf{a}),$$

$$\frac{\partial(f-g)}{\partial x_k}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) - \frac{\partial g}{\partial x_k}(\mathbf{a}),$$

$$\frac{\partial(k \cdot f)}{\partial x_k}(\mathbf{a}) = k \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}),$$

$$\frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_k}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k}(\mathbf{a}),$$

$$\frac{\partial(f/g)}{\partial x_k}(\mathbf{a}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a}) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k}(\mathbf{a})}{g(\mathbf{a})^2}.$$

Poznámka

Opakovaným parciálním derivováním, pokud je to možné, získáme **vyšší parciální derivace** zadané funkce více reálných proměnných.

Opakované derivování můžeme provést podle stejné nezávislé proměnné. Získáme tak **druhou, třetí atd. parciální derivaci** funkce f podle této proměnné. Používáme označení

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \right) \equiv \frac{\partial^3 f}{\partial x_k^3} \text{ atd.}$$

Pokud opakované derivování provádíme podle různých proměnných, dostáváme tzv. **smíšené vyšší derivace** zadané funkce. Pro smíšenou vyšší derivaci pak používáme označení

$$\frac{\partial}{\partial x_{k_1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{k_2}} \left(\dots \left(\frac{\partial f}{\partial x_{k_m}} \right) \right) \right) \equiv \frac{\partial^m f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_m}}.$$

Věta

Necht' má funkce f v bodě $\mathbf{a}$ spojité obě smíšené druhé derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{a})$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\mathbf{a})$.

Pak jsou si tyto derivace rovny.

Poznámka

Pro „rozumné“ funkce nezáleží tedy ve smíšených derivacích na pořadí derivování.

Vektorová pole a komplexní funkce více reálných proměnných**Poznámka**

V aplikacích je užitečný pojem reálného vektorového pole. Pod **vektorovým polem** (viz též kapitola 6.1) chápeme zobrazení $\mathbf{A}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Často bývá $m=4$ a $n=3$, kdy čtyři nezávislé proměnné popisují závislost trojrozměrného vektorového pole $\mathbf{A}$ na polohovém vektoru a čase.

Reálná vektorová pole jsou vlastně uspořádané n -tice reálných funkcí více reálných proměnných. Podobně jako v případě vektorových funkcí jedné reálné proměnné posuzujeme spojitost vektorových polí, počítáme limity a derivujeme je po složkách.

Poznámka

Zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ nazveme **komplexní funkcí více reálných proměnných**. Podobně jako v případě komplexních funkcí jedné reálné proměnné můžeme i nyní psát

$$f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) + if_2(\mathbf{x}),$$

kde $f_1(\mathbf{x})$ a $f_2(\mathbf{x})$ jsou již reálné funkce více reálných proměnných (reálná a imaginární část funkce f). Ve shodě s kapitolou 1.8 platí tedy

- komplexní funkce více reálných proměnných je spojitá, právě když jsou takové její reálná i imaginární část,
- $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_1(\mathbf{x}) + i \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_2(\mathbf{x}),$
- $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\mathbf{a}) + i \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(\mathbf{a}).$

2.2 Složené funkce

I funkce více proměnných můžeme různými způsoby skládat. V této kapitole si ukážeme, jak několik základních typů složených funkcí více reálných proměnných derivovat.¹

Věta

Nechť $f(x_1, \dots, x_n)$ je reálná funkce n reálných proměnných a dále necht' $g_j(t)$ jsou reálné funkce jedné reálné proměnné, $j = 1, \dots, n$. Pak pro funkci $h(t) \equiv f(g_1(t), \dots, g_n(t))$ platí

$$\frac{dh}{dt}(t_0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(g_1(t_0), \dots, g_n(t_0)) \cdot \frac{dg_j}{dt}(t_0).$$

Věta

Nechť $f(y)$ je reálná funkce jedné reálné proměnné a $g(x_1, \dots, x_n)$ je reálná funkce n reálných proměnných. Pak pro funkci $h(x_1, \dots, x_n) \equiv f(g(x_1, \dots, x_n))$ a pro každé $j = 1, \dots, n$ platí

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_n) = \frac{df}{dy}(g(a_1, \dots, a_n)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_n).$$

Věta

Nechť $f(y_1, \dots, y_m)$ je reálná funkce m reálných proměnných a $g_j(x_1, \dots, x_n)$, $j = 1, \dots, m$, jsou reálné funkce n reálných proměnných. Pak pro funkci

$$h(x_1, \dots, x_n) \equiv f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n))$$

a pro každé $k = 1, \dots, n$ platí

¹ V níže uvedených větách předpokládáme, že všechny derivace existují.

$$\frac{\partial h}{\partial x_k}(b_1, \dots, b_m) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}(g_1(b_1, \dots, b_m), \dots, g_n(b_1, \dots, b_m)) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(b_1, \dots, b_m).$$

Poznámka

Vzorce uvedené v předcházejících třech větách je možno psát i ve stručnější a přehlednější formě

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt}(t_0) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{g}(t_0)) \cdot \frac{dg_j}{dt}(t_0), \\ \frac{\partial h}{\partial x_j}(\mathbf{a}) &= \frac{df}{dy}(g(\mathbf{a})) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{a}), \\ \frac{\partial h}{\partial x_k}(\mathbf{b}) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}(\mathbf{g}(\mathbf{b})) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(\mathbf{b}). \end{aligned}$$

Obecný návod, který pro derivování složených funkcí více reálných proměnných uvedené věty poskytují, je možno formulovat následujícím způsobem:

- nejdříve derivuj vnější funkci podle každé proměnné, která závisí na proměnné vnitřní funkce, podle níž derivaci složené funkce počítáme,
- pak tuto derivaci vynásob odpovídající derivací vnitřní funkce,
- nakonec všechny takto získané součiny sečti.

2.3 Derivace ve směru

Parciální derivace $\partial f / \partial x_k(\mathbf{a})$ popisuje, jak se v zadaném bodě mění funkce f podél k -té souřadnicové osy. V této kapitole si ukážeme, jak popsat změnu dané funkce podél libovolné přímky procházející bodem $\mathbf{a}$.

Definice

Nechť $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^n$ je jednotkový vektor, tj. platí $\|\mathbf{n}\| = 1$.¹ Pak limitu

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{n}) - f(\mathbf{a})}{t}$$

nazveme **derivací funkce f v bodě $\mathbf{a}$ ve směru $\mathbf{n}$** . Budeme pro ni používat symbol $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{a})$.

Poznámka

Pro speciální volbu $\mathbf{n}^{(k)} = [0, \dots, 1, \dots, 0]$, kde jednička stojí na k -té pozici a vektor $\mathbf{n}$ míří ve směru k -té souřadnicové osy, přechází derivace v zadaném směru na prostou parciální derivaci:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}^{(k)}}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}).$$

Věta

Nechť funkce f má na nějakém okolí bodu $\mathbf{a}$ všechny první parciální derivace, které jsou navíc v bodě $\mathbf{a}$ spojité. Pak platí

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^n n_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}),$$

kde n_k jsou složky vektoru $\mathbf{n}$.

¹ Symbolem $\|\mathbf{n}\|$ označujeme eukleidovskou normu vektoru $\mathbf{n}$.

Definice

Vektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right)$$

nazýváme **gradientem** funkce f v bodě $\mathbf{a}$. Obvykle pro něj používáme označení $\nabla f(\mathbf{a})$ ¹.

Poznámka

Pomocí gradientu můžeme vzorec pro výpočet derivace ve směru $\mathbf{n}$ přepsat do stručnějšího a přehlednějšího tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{a}) = \mathbf{n} \cdot \nabla f(\mathbf{a}).$$

Současně však můžeme zapsat skalární součin dvou vektorů jako součin jejich velikostí a kosinu úhlu, který svírají. Platí tedy

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{a}) = \|\nabla f(\mathbf{a})\| \cos \alpha,$$

kde α je úhel sevřený vektorem gradientu $\nabla f(\mathbf{a})$ a jednotkovým vektorem $\mathbf{n}$, $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$. Derivace $\partial f / \partial \mathbf{n}(\mathbf{a})$ bude proto nabývat své maximální hodnoty pro $\alpha = 0$. Můžeme tedy říci, že *gradient funkce zadává směr jejího maximálního růstu*.

2.4 Totální diferenciál, Taylorův rozvoj

Totální diferenciál

Věta

Nechť funkce $f(\mathbf{x})$ má na nějakém okolí bodu $\mathbf{a}$ všechny první parciální derivace, které jsou navíc v bodě $\mathbf{a}$ spojité. Pak platí²

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|).$$

Poznámka

Podle této věty je možno na nějakém malém okolí bodu $\mathbf{a}$, tj. pro ta $\mathbf{x}$, která se od $\mathbf{a}$ příliš neliší, nahradit obecnou funkci f jednodušší funkcí lineární. Můžeme tedy pro tato $\mathbf{x}$ psát s přibližnou platností³

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Chyby, kterých se při této přibližné náhradě dopustíme, budou až druhého řádu, tj. úměrné $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2$.

Definice

Výraz $df(\mathbf{x}; \mathbf{a}) \equiv \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \approx f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})$ se obvykle nazývá **totálním diferenciálem** funkce f v bodě $\mathbf{a}$.

¹ Viz též kapitola 6.2.

² Pod symbolem $o(x)$ rozumíme libovolnou funkci, která splňuje $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 0$.

³ Jistě nepřekvapí, že pro funkci dvou proměnných $f(x, y)$ tato lineární funkce zadává tečnou rovinu ke grafu funkce f v bodě $\mathbf{a} = [a_x, a_y]$.

Taylorův rozvoj

Věta (Taylorova)

Nechť má funkce f má na nějakém okolí bodu $\mathbf{a}$ spojité všechny parciální derivace až do řádu m . Pak platí

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = & f(\mathbf{a}) + \frac{1}{1!} \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a})(x_k - a_k) + \\ & + \frac{1}{2!} \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2}}(\mathbf{a})(x_{k_1} - a_{k_1})(x_{k_2} - a_{k_2}) + \\ & + \dots + \\ & + \frac{1}{m!} \sum_{k_1=1}^n \dots \sum_{k_m=1}^n \frac{\partial^m f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_m}}(\mathbf{a})(x_{k_1} - a_{k_1}) \dots (x_{k_m} - a_{k_m}) + \\ & + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^m). \end{aligned}$$

Poznámka

Podle této věty je možno, podobně jako v případě funkcí jedné reálné proměnné (viz kapitola 1.5), nahradit na nějakém malém okolí bodu $\mathbf{a}$ obecnou funkci f jednodušším polynomem, tentokrát ovšem polynomem více proměnných. Tento polynom nazýváme **Taylorovým polynomem** stupně m funkce f v bodě $\mathbf{a}$. Používáme pro něj symbolické označení $T_m(\mathbf{x}; f, \mathbf{a})$. Chyby, kterých se při této přibližné náhradě dopustíme, jsou řádu $m+1$, tj. jsou úměrné $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{m+1}$. Hovoříme tedy o **přiblížení m -tého řádu**.

Poznámka

Všimněte, že pro $m=1$ přechází Taylorova věta na větu o totálním diferenciálu. Taylorova věta je tedy zobecněním věty o totálním diferenciálu.

2.5 Lokální extrémy

Lokální extrémy

Definice

Nechť je funkce $f(\mathbf{x})$ definována na nějakém okolí bodu $\mathbf{a}$. Řekneme, že tato funkce má v bodě $\mathbf{a}$

- **lokální maximum** $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 \forall \mathbf{x} \in D_f : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$,
- **ostré lokální maximum** $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 \forall \mathbf{x} \in D_f : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$,
- **lokální minimum** $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 \forall \mathbf{x} \in D_f : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$,
- **ostré lokální minimum** $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 \forall \mathbf{x} \in D_f : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a})$.

Lokální maximum a lokální minimum nazýváme souhrnně **lokálními extrémy**, ostré lokální maximum a ostré lokální minimum **ostrými lokálními extrémy**.

Věta

Nechť má funkce f na nějakém okolí bodu $\mathbf{a}$ všechny první parciální derivace. Má-li funkce v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém, jsou nutně tyto derivace nulové.

Poznámka

Nulovost parciálních derivací prvního řádu je pouze nutnou podmínkou existence lokálního extrému studované funkce v daném bodě. Obecně se nejedná o podmínku postačující - funkce s nulovými prvními derivacemi nemusí mít v zadaném bodě lokální extrém. Navíc z nulovosti prvních derivací nejsme schopni určit typ extrému. K tomu je zapotřebí zkoumat derivace druhé či dokonce vyšší.

V této kapitole se omezíme na případ, kdy již samotné druhé derivace umožňují rozhodnout o povaze extrému. Protože nás v případě lokálních extrémů zajímá pouze chování studované funkce na malém okolí vybraného bodu, můžeme použít k přibližnému popisu této funkce na zvoleném okolí Taylorovu větu¹. Omezíme-li se na velmi malé okolí bodu **a**, vystačíme s tzv. **kvadratickou aproximací** (přiblížením druhého řádu) a pro funkci f , která má v bodě **a** nulové první derivace, můžeme psát

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j).$$

Druhý člen na pravé straně této formule můžeme dále přepsat do formálně jednoduššího tvaru

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} z_i z_j,$$

zavedeme-li²

$$A_{ij} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) \quad \text{a} \quad z_i = (x_i - a_i).$$

Definice

Funkci $F(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} z_i z_j$, kde matice A_{ij} je symetrická ($A_{ij} = A_{ji} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$), nazveme **kvadratickou formou** n proměnných $z_1, \dots, z_n$.

Věta

Předpokládejme, že funkce f má v bodě **a** nulové první derivace³, a označme dále

$$D_2(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} z_i z_j, \quad \text{kde} \quad A_{ij} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}).$$
 Pak platí

- je-li kvadratická forma $D_2(\mathbf{z})$ pozitivně definitní⁴, nabývá funkce f v bodě **a** ostrého lokálního minima,
- je-li naopak kvadratická forma $D_2(\mathbf{z})$ negativně definitní, nabývá funkce f v bodě **a** ostrého lokálního maxima,
- pokud je tato kvadratická forma indefinitní, nemá funkce v daném bodě lokální extrém, ale tzv. **sedlový bod**.

Poznámka

Pokud není splněna ani jedna z uvedených podmínek, není možno o povaze lokálního extrému rozhodnout, dokonce není ani možno tvrdit, že funkce v zadaném bodě nějaký extrém má. Ke konečnému rozhodnutí je zapotřebí studovat vyšší derivace funkce f v tomto bodě.

¹ Viz kapitola 2.4.

² Všimněte si, že vzhledem záměnnosti parciálních derivací platí $A_{ij} = A_{ji}$. Matice A_{ij} je tedy symetrická.

³ A pochopitelně spojité druhé derivace na nějakém okolí tohoto bodu.

⁴ Vysvětlení nezbytných pojmů týkajících se kvadratických forem podáváme níže v této kapitole.

Kvadratické formy

Definice

Kvadratickou formu $F(\mathbf{z})$ nazveme¹

- *pozitivně definitní* $\Leftrightarrow \forall \mathbf{z} \neq \mathbf{0} : F(\mathbf{z}) > 0$,
- *negativně definitní* $\Leftrightarrow \forall \mathbf{z} \neq \mathbf{0} : F(\mathbf{z}) < 0$,
- *indefinitní* $\Leftrightarrow (\exists \mathbf{z} \neq \mathbf{0} : F(\mathbf{z}) > 0) \wedge (\exists \tilde{\mathbf{z}} \neq \mathbf{0} : F(\tilde{\mathbf{z}}) < 0)$.

Poznámka

Vzhledem k symetrii matice A_{ij} je velmi vhodné testovat definitnost jí odpovídající kvadratické formy pomocí vlastních čísel této matice.²

Definice

*Vlastním číslem*³ matice A_{ij} rozumíme číslo λ , které splňuje tzv. *charakteristickou rovnici*

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0,$$

kde $\det A$ je determinant matice A .

Věta

Symetrická matice má všechna vlastní čísla reálná.

Věta

Kvadratická forma $F(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} z_i z_j$ je

- *pozitivně definitní* $\Leftrightarrow$ má všechna vlastní čísla kladná,
- *negativně definitní* $\Leftrightarrow$ má všechna vlastní čísla záporná,
- *indefinitní* $\Leftrightarrow$ má alespoň jedno vlastní číslo kladné a alespoň jedno záporné.

Lokální extrémy funkce dvou reálných proměnných

Nechť má funkce $f(x, y)$ v bodě $\mathbf{a} = [a_x, a_y]$ obě první parciální derivace nulové,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}) = 0.$$

¹ Podobně jako výše používáme zkratku $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_n]$ a $\mathbf{0} = [0, \dots, 0]$.

² Existují ovšem i jiné postupy (např. Sylvestrovo kritérium), o nichž může čtenář najít bližší poučení např. v příručce Rektorysové [5].

³ Viz též Appendix 4.

Pak v tomto bodě může studovaná funkce nabývat lokálního extrému. Konečné rozhodnutí, zda tomu tak je, a rozhodnutí o povaze extrému závisí na chování kvadratické formy

$$A_{xx}z_x^2 + A_{xy}z_xz_y + A_{yx}z_xz_y + A_{yy}z_y^2,$$

kde

$$A_{xx} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}), \quad A_{yy} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a}) \quad \text{a} \quad A_{xy} = A_{yx} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}).$$

O její pozitivní či negativní definitnosti rozhodneme na základě znamének vlastních čísel matice A . Odpovídající charakteristická rovnice nabývá tvaru

$$\begin{vmatrix} A_{xx} - \lambda & A_{xy} \\ A_{xy} & A_{yy} - \lambda \end{vmatrix} \equiv (A_{xx} - \lambda)(A_{yy} - \lambda) - A_{xy}^2 = 0$$

a po úpravách

$$\lambda^2 - (A_{xx} + A_{yy})\lambda + A_{xx}A_{yy} - A_{xy}^2 = 0.$$

Jedná se tedy o kvadratickou rovnici pro neznámou λ , pro jejíž kořeny můžeme psát obecný vzorec

$$\lambda_{1,2} = \frac{(A_{xx} + A_{yy}) \pm \sqrt{(A_{xx} - A_{yy})^2 + 4A_{xy}^2}}{2}.$$

Všimněte si především, že obě získaná čísla jsou nutně reálná, výraz pod odmocninou je totiž vždy nezáporný. Podle jejich znamének pak již můžeme snadno usoudit na typ extrému:

- jsou-li obě vlastní čísla kladná, má funkce v zadaném bodě lokální minimum,
- jsou-li obě vlastní čísla záporná, má funkce v zadaném bodě lokální maximum,
- mají-li obě vlastní čísla různá znaménka, nemá funkce v zadaném bodě lokální extrém,
- je-li alespoň jedno z vlastních čísel nulové, nelze o povaze extrému ani o tom, zda jej funkce f v bodě $\mathbf{a}$ skutečně nabývá, ze samotných druhých derivací rozhodnout.