Apendix

A1 Vybrané pojmy z teorie zobrazení

Pokud není čtenář seznámen se základy teorie množin a formální logiky, odkazujeme jej do příslušných kapitol Polákovy knihy [7].

Zobrazení

Definice
Předpis f, který každému prvku nějaké množiny M přiřazuje nejvýše jeden prvek množiny N, nazveme ***zobrazením z množiny* M *do množiny* N**.

Množinu všech prvků z M, kterým tento předpis přiřazuje vůbec nějaký prvek z N, nazveme ***definičním oborem zobrazení***. Obvykle jej značíme D_f. Zadání definičního oboru je nezbytnou součástí definice zobrazení.

Množinu všech prvků z N, které jsou obrazem nějakého prvku M, nazveme ***oborem hodnot zobrazení***. Obvykle jej značíme H_f.

Poznámka
Pro zobrazení f z množiny M do množiny N obvykle používáme symbolický zápis $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$. Pokud toto zobrazení přiřazuje prvku $x \in \mathrm{M}$ prvek $y \in \mathrm{N}$, píšeme obvykle $y = f(x)$.

Definice
Nechť $y = f(x)$. Pak x nazýváme ***vzorem*** y a y ***obrazem*** x v zobrazení f. Množinu všech obrazů přiřazených zobrazením f vzorům ze zadané množiny $\mathrm{A} \subset \mathrm{D}_f$, nazveme ***obrazem množiny*** A (v zobrazení f). Zpravidla ji označujeme symbolem $f(\mathrm{A})$.

Definice
Pokud je definiční obor zobrazení f totožný s množinou M, hovoříme o zobrazení ***množiny* M** (místo o zobrazení z M).

Pokud je obor hodnot zobrazení f totožný s množinou N, hovoříme o zobrazení ***na množinu* N** (místo o zobrazení do N).

Funkce

Definice
Zobrazení, která zobrazují nějakou číselnou množinu (resp. kartézský součin číselných množin) na jinou číselnou množinu (resp. na kartézský součin číselných množin), nazýváme ***funkcemi***. Obraz daného vzoru pak v takovém zobrazení nazýváme ***funkční hodnotou*** funkce v zadaném bodě.

Příklady funkcí

název	**definice** [1]	**označení** [2]
reálná funkce jedné reálné proměnné	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	$f(x)$
reálná funkce dvou reálných proměnných	$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$	$f(x,y)$
reálná funkce tří reálných proměnných	$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$	$f(x,y,z)$
reálná funkce n reálných proměnných	$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$	$f(x_1,x_1,...,x_n)$
reálná vektorová funkce jedné reálné proměnné	$\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$	$\mathbf{f}(x)$ [3]
vektorové pole	$\mathbf{A}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$	$\mathbf{A}(x_1,x_1,...,x_n)$ [3]
komplexní funkce jedné reálné proměnné	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$	$f(x)$

Poznámka
Funkce zadáváme obvykle předpisem, aniž uvedeme jejich definiční obor. V tomto případě považujeme za definiční obor množinu všech čísel (resp. jejich uspořádaných n-tic), pro která má zadaný předpis smysl. Hovoříme pak obvykle o ***maximálním definičním oboru***. Při jeho vyšetřování musíme zejména dbát na to, abychom

- nedělili nulou,
- neodmocňovali záporné číslo.

Dále je třeba též vzít v úvahu omezené definiční obory některých funkcí - logaritmů, goniometrických a cyklometrických funkcí ap.

Reálné funkce jedné reálné proměnné

Definice
Reálná funkce jedné reálné proměnné je zobrazení z reálných čísel do reálných čísel, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Viz též výše uvedená tabulka.

Definice
Pod ***grafem*** reálné funkce jedné reálné proměnné rozumíme množinu $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : y=f(x)\}$. Tuto množinu často zobrazujeme v rovině.

Definice
Zde shrnujeme některé významné pojmy, které popisují speciální vlastnosti funkcí jedné reálné proměnné:

- f je ***rostoucí*** funkce $\Leftrightarrow$ $\forall x_1,x_2\in \mathrm{D}_f : x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$,
- f je ***neklesající*** funkce $\Leftrightarrow$ $\forall x_1,x_2\in \mathrm{D}_f : x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$,
- f je ***klesající*** funkce $\Leftrightarrow$ $\forall x_1,x_2\in \mathrm{D}_f : x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$,
- f je ***nerostoucí*** funkce $\Leftrightarrow$ $\forall x_1,x_2\in \mathrm{D}_f : x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$,
- f je ***prostá*** funkce $\Leftrightarrow$ $\forall x_1,x_2\in \mathrm{D}_f : f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$.

---

[1] Symbolem $\mathbb{R}$ označujeme množinu všech reálných čísel, symbolem $\mathbb{C}$ pak čísla komplexní. Místo n-násobného kartézského součinu $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times...\mathbb{R}$ používáme zkratku $\mathbb{R}^n$.
[2] Argumenty uváděné v závorce se nazývají ***nezávislé proměnné*** nebo prostě ***argumenty*** funkce.
[3] V přírodovědných aplikacích jsou n a m obvykle rovna dvěma či třem.

Definice
Funkce rostoucí, klesající, nerostoucí a neklesající nazýváme souhrnně ***funkcemi monotónními***.

Poznámka
Pomocí daných funkcí můžeme vytvářet funkce nové. Následující definice shrnují nejjednodušší možnosti, jak to udělat.

Definice (***inverze prosté funkce***)
Nechť $f : \mathrm{D}_f \to \mathrm{H}_f$ je prostá funkce. Pak je možno definovat funkci $f^{-1} : \mathrm{H}_f \to \mathrm{D}_f$ předpisem

$$y = f^{-1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f(y).$$

Tuto funkci nazýváme ***inverzní funkcí*** k funkci *f*.

Definice (***algebraické operace s funkcemi***)
- ***sčítání*** $(f+g)(x) \equiv f(x)+g(x)$,
- ***odečítání*** $(f-g)(x) \equiv f(x)-g(x)$,
- ***násobení*** $(f.g)(x) \equiv f(x).g(x)$,
- ***dělení*** $(f/g)(x) \equiv f(x)/g(x)$.

Definice (***skládání funkcí***)
Nechť $f : \mathrm{D}_f \to \mathrm{H}_f$ a $g : \mathrm{D}_g \to \mathrm{H}_g$ jsou dvě funkce, které splňují $H_f \cap D_g \neq \emptyset$ [1]. Pak můžeme definovat funkci h s definičním oborem $\mathrm{D}_h = \left\{ x \in \mathrm{D}_f : f(x) \in \mathrm{D}_g \right\}$ pomocí předpisu

$$h(x) = f(g(x)).$$

Tuto funkci nazýváme ***složenou*** a obvykle pro ni užíváme symbolický zápis $h \equiv f \circ g$.

Poznámka
Bližší informace o některých základních funkcích může čtenář najít například v knize Polákově [7].

[1] Symbolem $\emptyset$ označujeme ***prázdnou množinu***.

A2 Vybrané pojmy z topologie

Poznámka
Pod **Δ-*okolím*** bodu $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n)$ rozumíme vnitřek *n*-rozměrné koule

$$U_\delta(\mathbf{a}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta\},$$

kde $\|\mathbf{b}\|$ označuje eukleidovskou normu vektoru $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{b}\| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$.

Definice
Řekneme, že

- $\mathbf{x}$ je ***vnitřní bod*** množiny[1] A, právě když $\exists \delta > 0 : U_\delta(\mathbf{x}) \subset \mathrm{A}$;
- $\mathbf{x}$ je ***hraniční bod*** množiny A, právě když
  $\forall \delta > 0 \ \exists \mathbf{y} \in A \wedge \exists \mathbf{z} \notin A : \mathbf{y} \in U_\delta(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{z} \in U_\delta(\mathbf{x})$;
- $\mathbf{x}$ je ***vnější bod*** množiny, pokud není ani jejím vnitřním, ani hraničním bodem.

Množinu všech vnitřních (vnějších) bodů množiny nazýváme jejím ***vnitřkem*** (***vnějškem***), množinu všech hraničních bodů[2] její ***hranicí***. Pro hranici množiny M používáme obvyklý symbol $\partial \mathrm{M}$.

Definice
Množinu, jejíž každý bod je současně jejím vnitřním bodem, nazveme ***množinou otevřenou***.[3] Množinu, která obsahuje svou hranici, nazveme ***množinou uzavřenou***.

Definice
Množinu $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^n$ nazveme ***omezenou***, právě když $\exists K > 0 : \ \forall \mathbf{x} \in \mathrm{A} \ \|\mathbf{x}\| < K$.

K zavedení následujících pojmů je nutné znát obsah kapitoly 5.1.

Definice
Množinu A nazveme ***souvislou***, právě když pro každou dvojici bodů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{A}$ existuje spojitá křivka $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathrm{A}$ splňující $\varphi(\alpha) = \mathbf{x}$ a $\varphi(\beta) = \mathbf{y}$.[4] Otevřenou souvislou množinu nazveme ***oblastí***.

Poznámka
S menšími nároky na přesnost můžeme říci, že množina je souvislá, je-li možno spojit libovolné dva body z této množiny nepřerušovanou čárou (cestou), která v ní celá leží.

---

[1] Pod množinou rozumíme v celém Apendixu A2 vždy podmnožinu z $\mathbb{R}^n$.
[2] Všimněte si, že hraniční bod nemusí obecně do zadané množiny patřit.
[3] Do otevřené množiny tedy nepatří žádný z jejích hraničních bodů.
[4] V topologii se množina souvislá ve smyslu této definice obvykle nazývá množinou ***křivkově souvislou***. S obecnou souvislostí množin se však v tomto skriptu nesetkáváme, můžeme proto použít uvedené stručnější označení.

Definice
Řekneme, že uzavřenou spojitou křivku $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathrm{A}$ je ***možno stáhnout na množině*** **A** ***do bodu*** **x**, právě když existuje spojité zobrazení $\Phi : \langle \alpha, \beta \rangle \times \langle 0,1 \rangle \to \mathrm{A}$ takové, že pro všechna t z intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ platí $\Phi(t,0) = \varphi(t)$ a $\Phi(t,1) = \mathbf{x}$.

Definice
Souvislou množinu, v níž je možno každou uzavřenou spojitou křivku stáhnout do bodu, nazveme ***jednoduše souvislou***.

Poznámka
Uzavřenou křivku si můžeme představit jako smyčku lasa obepínající zadaný bod a ležící v zadané množině. Je-li tato množina jednoduše souvislá, nemusíme při stahování smyčky překročit její hranice.

Poznámka
Existují souvislé množiny, které nejsou jednoduše souvislými. Příkladem takové množiny může být v rovině mezikruží a v prostoru válcová vrstva. Kulová vrstva v prostoru ale jednoduše souvislá je.

A3 Posloupnosti

V tomto apendixu uvádíme základní definice a věty o posloupnostech obecně komplexních čísel, a to pouze v míře nezbytné k pochopení látky vyložené v tomto skriptu. Další poučení může čtenář nalézt např. v učebnici Jarníkově [3].

Definice
Zobrazení množiny všech přirozených čísel do množiny čísel reálných nazveme ***reálnou posloupností***. Jedná-li se o zobrazení do množiny čísel komplexních, hovoříme o ***posloupnosti komplexní***. Pro posloupnost užíváme obvykle označení $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Definice
Řekneme, že posloupnost[1] $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ má ***vlastní limitu*** a, právě když

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall n > n_0 \text{ platí } |a_n - a| < \varepsilon .$$

Tento fakt zapisujeme symbolicky jako $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. Posloupnosti, které mají vlastní limitu, se nazývají ***posloupnostmi konvergentními***.

Řekneme, že reálná posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ má ***nevlastní limitu*** $+\infty$ ($-\infty$), právě když

$$\forall K > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall n > n_0 \text{ platí } a_n > K$$
$$\left(\forall K < 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall n > n_0 \text{ platí } a_n < K\right).$$

Tento fakt zapisujeme symbolicky jako $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty\right)$. Posloupnosti, které mají nevlastní limitu nebo limitu nemají, se nazývají ***posloupnostmi divergentními***.

Poznámka
Posloupnost má vždy nejvýše jednu limitu.

Věta
Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ jsou dvě reálné posloupnosti. Dále nechť existuje takové přirozené číslo n_0, že pro každé $n > n_0$ platí $a_n \le b_n$. Existují-li limity[2] obou těchto posloupností, pak platí

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \le \lim_{n\to+\infty} b_n .$$

Věta
Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ jsou dvě reálné posloupnosti, které mají stejnou vlastní limitu. Dále nechť reálná posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{+\infty}$ splňuje pro každé přirozené $n > n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$) nerovnosti $a_n \le c_n \le b_n$. Pak existuje vlastní limita posloupnosti $\{c_n\}_{n=1}^{+\infty}$ a platí

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} b_n .$$

[1] reálná nebo komplexní
[2] vlastní nebo i nevlastní

Věta

Existují-li limity na pravých stranách[1] a mají-li pravé strany smysl v rámci pravidel počítání s nekonečnými čísly (viz kapitola 1.1), platí následující rovnosti

$$\lim_{n\to+\infty}\left(a_n+b_n\right)=\lim_{n\to+\infty}a_n+\lim_{n\to+\infty}b_n\,,$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(a_n-b_n\right)=\lim_{n\to+\infty}a_n-\lim_{n\to+\infty}b_n\,,$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(a_n.b_n\right)=\lim_{n\to+\infty}a_n.\lim_{n\to+\infty}b_n\,,$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(a_n/b_n\right)=\lim_{n\to+\infty}a_n/\lim_{n\to+\infty}b_n\,.$$

Poznámka

Posloupnosti $\{(1+1/n)^n\}_{n=1}^{+\infty}$ a $\{(1+1/n)^{n+1}\}_{n=1}^{+\infty}$ mají společnou vlastní limitu, která se obvykle označuje symbolem e a nazývá se ***Eulerovo číslo***[2]. Toto iracionální číslo hraje velmi důležitou roli jak v matematice, tak i v přírodních vědách. Je např. základem často používaných přirozených logaritmů. Protože se obě posloupnosti blíží ke své limitě jen velmi pomalu, používá se k výpočtu Eulerova čísla obvykle jiná, mnohem rychleji konvergující posloupnost. Platí totiž tvrzení

$$e=1+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\,,$$

kde $k!$ je faktoriál čísla k ($k!\equiv 1.2...(k-1).k$), a pro dostatečně velká n můžeme proto přibližně psát

$$e\approx 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\,.$$

Tak např. volba $n = 10$ umožňuje určit hodnotu e s přesností na 7 desetinných míst.

[1] Pro reálné posloupnosti vlastní nebo nevlastní.

[2] Přibližná číselná hodnota Eulerova čísla je 2,718281828. Toto číslo si snadno zapamatujeme, uvědomíme-li si, že k 2,7 stačí přidat dvakrát rok úmrtí Ludwiga van Beethovena zvětšený o jedničku.

A4 Základy lineární algebry

A4.1 Vektory a vektorové prostory

Ze střední školy je znám pojem vektoru ve dvou základních významech: jednak tzv. geometrický vektor neboli orientovaná úsečka (úsečka s vyznačeným začátkem a koncem), jednak jako fyzikální veličina, která má určitý směr, orientaci a velikost. Oba významy mají společné znaky, zejména možnost sčítat (skládat) vektory a násobit je číslem, dále určovat velikost vektoru a úhly mezi dvěma vektory, rozkládat je na složky, určovat jejich souřadnice atd.
Axiomatická definice vektoru abstrahuje od konkrétní představy a definuje vektor jako prvek vektorového (také lineárního) prostoru.

Definice
Vektorovým prostorem nad množinou reálných čísel (skalárů) $\mathbb{R}$ je neprázdná množina V, ve které jsou definovány dvě operace:

- Sčítání vektorů, které každé dvojici vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ z V přiřazuje vektor $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ z V.
- Násobení vektoru skalárem, které každému skaláru k z $\mathbb{R}$ a vektoru $\mathbf{a}$ z V přiřazuje vektor $k\mathbf{a}$ z V.

Tyto operace musí splňovat následující podmínky:

- $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ (komutativnost sčítání vektorů).
- $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ (asociativnost sčítání vektorů).
- Existuje jediný vektor $\mathbf{0}$ takový, že $\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}$ pro každé $\mathbf{a}$ z V (nulový vektor).
- Pro každý vektor $\mathbf{a}$ z V existuje jediný vektor $-\mathbf{a}$ takový, že $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$ (opačný vektor).
- Pro každé k, m z $\mathbb{R}$ a každý vektor $\mathbf{a}$ z V platí $k(m\mathbf{a})=(km)\mathbf{a}$ (asociativnost násobení skalárem).
- Pro každé k, m z $\mathbb{R}$ a každý vektor $\mathbf{a}$ z V platí $(k+m)\mathbf{a}=k\mathbf{a}+m\mathbf{a}$ (distributivní zákon).
- Pro každé k z $\mathbb{R}$ a každé $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ z V platí $k(\mathbf{a}+\mathbf{b})=k\mathbf{a}+k\mathbf{b}$ (distributivní zákon).
- Pro každý vektor $\mathbf{a}$ z V platí $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$ (jednotkový prvek pro násobení skalárem).

Poznámka
- Množinou skalárů může být také množina komplexních čísel $\mathbb{C}$, obecně jakékoliv tzv. číselné těleso, což je jistá algebraická struktura, která je zobecněním pojmu množiny reálných čísel. Pro větší konkrétnost se bude dále hovořit o reálných číslech, ale pro většinu následujících tvrzení není tento předpoklad nutný.
- Nulový vektor se v praxi značí obyčejnou nulou (číslem).

Příklad
Velmi důležitým příkladem vektorového prostoru je n-násobný kartézský součin $\mathbb{R}^n$, tzn. množina všech uspořádaných n–tic reálných čísel, ve které jsou operace sčítání a násobení skalárem definovány takto:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$
$$k\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n).$$

Rozdíl vektorů

Věta (*rozdíl vektorů*)
Ke každým dvěma vektorům $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ z V existuje právě jeden vektor $\mathbf{x}$ takový, že platí:

$$\mathbf{b} + \mathbf{x} = \mathbf{a}.$$

Tento vektor se nazývá ***rozdílem vektorů*** $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a značí se $\mathbf{x} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Věta
Platí: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ (odečíst vektor je totéž jako přičíst vektor opačný).

Lineární kombinace vektorů

Definice (*lineární kombinace vektorů*)
Jestliže pro nějaký vektor $\mathbf{x}$ platí rovnost

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n,$$

pak vektor $\mathbf{x}$ nazýváme lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ s koeficienty $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Číslo *n* je lib. přirozené (a tedy konečné) číslo.

Lineární nezávislost vektorů

Definice (*lineární nezávislost vektorů*)
Množina vektorů U daného vektorového prostoru V se nazývá ***lineárně nezávislou***, jestliže žádný její prvek $\mathbf{x}$ není lineární kombinací jiných prvků z U. V opačném případě je množina U ***lineárně závislá***.

Báze vektorového prostoru

Definice
Bází vektorového prostoru nazýváme takovou jeho podmnožinu B, pro kterou platí:
- B je lineárně nezávislá množina;
- každý vektor $\mathbf{x}$ z V lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z B.

Počet prvků báze B daného vektorového prostoru V nezávisí na konkrétní volbě báze. Nazývá se ***dimenzí*** vektorového prostoru. Značí se často dim(V).

Poznámka
- Místo pojmu „počet prvků“ je přesnější pojem „kardinální číslo“, který je obecnější a lze jej použít také v případě nekonečných množin. Pro konečné množiny jsou oba pojmy totožné.
- Je-li báze B prostoru V tvořena *n* vektory $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$, pak vektor $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \ldots + x_n\mathbf{b}_n$, kde *n*-tice čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je určena jednoznačně. Libovolný vektorový prostor V dimenze *n* je tedy možno vzájemně jednoznačně zobrazit na množinu všech uspořádaných *n*-tic reálných čísel $\mathbb{R}^n$. Mluvíme o **souřadnicích vektoru** $\mathbf{x}$ v bázi B. Volba báze znamená vlastně volbu souřadného systému. Odtud také plyne ne zcela přesná formulace, že „vektor je *n*-tice čísel“.

Příklad
V prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou bází např. množiny vektorů B_1 = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)}, B_2 = {(12, 0, 0), (0, -4.2, 0), (0, 0, 8.4)}, B_3 = {(1, 1, 0), (0, 1, -1), (1, 1, 1)} apod.

Norma vektoru

Definice

Normou (***velikostí, délkou, modulem***) ***vektoru*** rozumíme reálnou funkci $\|\mathbf{x}\|$ na vektorovém prostoru V, platí-li pro libovolné dva vektory $\mathbf{x},\mathbf{y}$ z V a libovolný skalár *k*:

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ (pozitivnost).
- $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (trojúhelníková nerovnost).
- $\|k\mathbf{x}\| = |k| \cdot \|\mathbf{x}\|$ (homogenita).
- $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (pozitivní definitnost).

Poznámka

- Někdy se norma značí podobně jako absolutní hodnota, tj. $|\mathbf{x}|$. V tomto případě se většinou používá název *velikost* nebo *délka* vektoru.
- Každá norma indukuje tzv. ***metriku***, tj. reálnou funkci $d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ vektorů $\mathbf{x},\mathbf{y}$ z V takto: $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \equiv \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$. Metrika je zobecněním geometrického pojmu vzdálenosti dvou bodů (daných jejich polohovými vektory) na libovolný vektorový prostor V.

Příklad

Typickým příkladem normy je tzv. ***Euklidovská norma***, definovaná v $\mathbb{R}^n$ jako odmocnina ze součtu druhých mocnin souřadnic vektoru:

$$\|(x_1, x_2, ..., x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}\ .$$

Čtenář si může snadno dokázat, že splňuje potřebné axiomy.

Skalární součin

Definice

Skalárním (***vnitřním***) ***součinem*** nazveme funkci, která dvojici vektorů $\mathbf{x},\mathbf{y}$ z V přiřazuje skalár označený $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ tak, že pro každé $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ z V a každý skalár *k* platí:

- $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot\mathbf{z} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}) + (\mathbf{y}\cdot\mathbf{z})$ (aditivnost).
- $(k\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} = k(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})$ (homogenita).
- $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{x}$ (symetrie, komutativnost).
- $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} > 0$ pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (pozitivní definitnost).

Jednoduchým důsledkem uvedených axiomů je dále:

- $\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{z})$.
- $\mathbf{x}\cdot(k\mathbf{y}) = k(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})$.
- $\mathbf{x}\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0}\cdot\mathbf{x} = 0$.

Poznámka

- Tato definice platí přesně pouze pro vektorový prostor nad tělesem reálných čísel; v případě komplexních čísel nabývá třetí axiom tvaru $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \overline{\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}}$ a druhý důsledek tvaru $\mathbf{x}\cdot(k\mathbf{y}) = \overline{k}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})$ (pruh značí komplexní sdružení).
- Dá se dokázat, že reálná funkce $\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}$, definovaná na V, splňuje axiomy normy, tak jak byly uvedeny výše. Ukazuje se tedy, že je-li vektorový prostor vybaven skalárním součinem, je v něm možno takto zavést také normu (a tudíž i metriku). V dalším textu tento vztah mezi skalárním součinem, normou a metrikou předpokládáme.

Příklad
Typickým příkladem vektorového prostoru se skalárním součinem je 2 nebo 3dimenzionální prostor geometrických, příp. fyzikálních vektorů, ve kterém je skalární součin vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ definován jako součin velikostí (norem) těchto vektorů a kosinu úhlu, který svírají: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\gamma$. Odtud se přejímá pro libovolné vektorové prostory pojem *kolmosti vektorů*.

Ortogonalita a ortonormalita vektorů

Definice (*kolmost vektorů*)
Dva vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ z V jsou ***na sebe kolmé*** (***ortogonální***) právě tehdy, je-li jejich skalární součin roven nule.

Definice
Ortogonální bází vektorového prostoru V vybaveného skalárním součinem nazýváme takovou bázi, jejíž vektory jsou navzájem kolmé, tzn. jejich skalární součin je nulový. Mají-li navíc všechny vektory báze jednotkovou velikost (neboli jsou normovány k 1), mluvíme o ***ortonormální bázi***.

Poznámka
Konkrétněji: je-li $\mathrm{B} \equiv \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n\}$ ortonormální bází, pak platí pro skalární součin libovolných dvou jejích prvků $\mathbf{b}_i$, $\mathbf{b}_j$ vztah $\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j = \delta_{ij}$. Symbol na pravé straně, tzv. *Kroneckerovo delta*, je roven 1 pro $i = j$, jinak je roven 0.

Příklad
Nejpoužívanější ortonormální bází v prostoru $\mathbb{R}^3$ je báze tvořená vektory $\mathbf{i} \equiv (1,0,0)$, $\mathbf{j} \equiv (0,1,0)$, $\mathbf{k} \equiv (0,0,1)$. Důkaz její ortonormality přenecháváme čtenáři.

Věta (*skalární součin v ortonormální bázi*)
Nechť je dán vektorový prostor V se skalárním součinem, jeho ortonormální báze $\mathrm{B} \equiv \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n\}$ a dva vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ z V, které lze vyjádřit ve tvaru $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + ... + x_n\mathbf{b}_n$, $\mathbf{y} = y_1\mathbf{b}_1 + y_2\mathbf{b}_2 + ... + y_n\mathbf{b}_n$. Pak pro skalární součin těchto vektorů platí

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i ,$$

což je známý tvar výpočtu skalárního součinu jako součtu součinů jednotlivých souřadnic.

Důkaz
Důkaz je snadný: $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{b}_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\mathbf{b}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \mathbf{b}_i\mathbf{b}_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Průmět a projekce vektoru

Definice
Průmětem vektoru $\mathbf{a}$ ***do vektoru*** $\mathbf{b}$ nazýváme vektor $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b_0})\mathbf{b_0}$, kde $\mathbf{b_0} \equiv \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}$ je jednotkový vektor ve směru vektoru $\mathbf{b}$. Číslo $a_{\mathbf{b}} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b_0}$ nazýváme ***projekcí vektoru*** $\mathbf{a}$ ***do vektoru*** $\mathbf{b}$.

Poznámka
V případě geometrických nebo fyzikálních vektorů v 2 a 3dimenzionálním prostoru se dá projekce vektoru $\mathbf{a}$ do vektoru $\mathbf{b}$ vyjádřit ve tvaru $a_b = \|\mathbf{a}\|\cos\gamma$ (γ je úhel mezi vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$), ze kterého je zřejmý původ zavedené terminologie.

Věta
Souřadnice vektoru v libovolné ortonormální bázi je totožná s projekcí tohoto vektoru do příslušného bázového vektoru.

Důkaz
Vypočtěme projekci vektoru $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \ldots + x_n\mathbf{b}_n$ do vektoru báze $\mathbf{b}_k$: $x_{\mathbf{b}_k} \equiv \mathbf{x}\cdot\mathbf{b}_k = \left(x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \ldots + x_n\mathbf{b}_n\right)\cdot\mathbf{b}_k = x_k\mathbf{b}_k\cdot\mathbf{b}_k = x_k\left(\mathbf{b}_k\cdot\mathbf{b}_k\right) = x_k$, neboť pro vektory báze platí relace ortonormality $\mathbf{b}_i\cdot\mathbf{b}_j = \delta_{ij}$.

Vektorový součin

Definice
Nechť je dán 3dimenzionální vektorový prostor V s ortonormální bází $\{\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}\}$. ***Vektorovým (vnějším) součinem*** vektorů $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ rozumíme vektor $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \left(a_2b_3 - a_3b_2\right)\mathbf{i} + \left(a_3b_1 - a_1b_3\right)\mathbf{j} + \left(a_1b_2 - a_2b_1\right)\mathbf{k}$.

Poznámka
- Vektorový součin se značí, jak už bylo ukázáno, křížkem $\times$, a to na rozdíl od skalárního součinu, který se značí tečkou. Není tedy možno tyto symboly zaměňovat, jak tomu je u součinu dvou čísel.
- Vektorový součin je definován pouze v třírozměrném prostoru, protože při menší dimenzi by neexistoval žádný vektor vyhovující definici a při větší naopak více než jeden, definice by nebyla jednoznačná. Jedná se o daleko méně obecný pojem, než je skalární součin.
- V rámci geometrického (fyzikálního) pohledu je možné ekvivalentně definovat vektorový součin $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ jako vektor, který je *pravotočivě kolmý* k vektorům $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a jehož velikost je rovna součinu $\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin\gamma$, kde γ je úhel mezi vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Výraz „*pravotočivě kolmý*“ znamená, že směr výsledného vektoru je dán pravidlem pravé ruky: položíme pravou ruku malíkovou hranou na rovinu vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ tak, že prsty vymezují ostrý úhel od vektoru $\mathbf{a}$ k vektoru $\mathbf{b}$; pak vztyčený palec pravé ruky ukazuje orientaci vektorového součinu $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.
- Velikost vektorového součinu $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ je rovna obsahu rovnoběžníku určeného vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

Věta
Pro vektorový součin platí:
- $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\left(\mathbf{b}\times\mathbf{a}\right)$ (antikomutativnost).
- $k\mathbf{a}\times\mathbf{b} = k\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)$ (asociativnost násobení skalárem).
- $\mathbf{a}\times\left(\mathbf{b}+\mathbf{c}\right) = \mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathbf{c}$ (distributivnost).

Smíšený součin

Definice
Smíšeným součinem třídimenzionálních vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ nazýváme číslo $\mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\right)$ a značíme jej $\left[\mathbf{abc}\right]$.

Věta

- Pro smíšený součin platí: $[\mathbf{abc}]=[\mathbf{bca}]=[\mathbf{cab}]=-[\mathbf{acb}]=-[\mathbf{cba}]=-[\mathbf{bac}]$.
- Absolutní hodnota smíšeného součinu $[\mathbf{abc}]$ udává objem rovnoběžnostěnu daného vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Dvojný součin

Definice

Dvojným součinem třídimenzionálních vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ nazýváme vektor $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$.

Věta

- Dvojný součin lze vyjádřit i bez vektorového násobení: $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$.
- Dvojný součin (a tedy ani vektorové násobení) *není asociativní*, tzn. obecně je $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\neq(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$.

A4.2 Matice (první část)

Definice

Maticí **A** typu (*m, n*) nazýváme schéma $(m\cdot n)$ čísel (reálných nebo i komplexních) sestavených do *m* řádků *n* sloupců

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Často používaný zkrácený zápis (pokud víme, o jaký typ matice se jedná) je $\mathbf{A}=(a_{ik})$. Je-li $m=n$, pak se **A** nazývá ***čtvercovou maticí*** *m-tého stupně (m-tého řádu)*, jinak hovoříme o ***matici obdélníkové***.

Poznámka

- Prvky a_{ik}, $1\le k\le n$, pro daný index *i* tvoří *i*-tý ***řádek***, prvky a_{ik}, $1\le i\le n$, pro daný index *k* tvoří *k*-tý ***sloupec***. První index v označení prvku a_{ik} nazýváme ***řádkovým***, druhý ***sloupcovým***. Řádky a sloupce se souhrnně nazývají ***řady***.
- Prvky a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... tvoří ***hlavní diagonálu*** a nazývají se ***hlavní prvky***, prvky a_{1n}, $a_{2,n-1}$, $a_{3,n-2}$, ... tvoří ***vedlejší diagonálu***.

Definice (r*ovnost matic*)

Matice $\mathbf{A}\equiv(a_{ik})$ se rovná matici $\mathbf{B}\equiv(b_{ik})$ právě tehdy, jsou-li obě matice stejného typu a jejich stejnolehlé prvky se rovnají. Stručný zápis: $\mathbf{A}=\mathbf{B}\Leftrightarrow\forall i,k: a_{ik}=b_{ik}$.

Speciální matice

Definice

- ***Nulovou maticí*** nazýváme matici, jejíž všechny prvky se rovnají nule. Značíme obvykle symbolem $\mathbf{0}$ nebo i číslem 0.
- ***Diagonální maticí*** nazýváme čtvercovou matici, u které prvky na hlavní diagonále jsou různé od nuly a všechny ostatní prvky rovny nule.
- ***Jednotkovou maticí*** nazýváme takovou diagonální matici, jejíž všechny hlavní prvky jsou rovny 1. Jednotková matice se obvykle značí $\mathbf{E}$, $\mathbf{I}$ nebo i číslem 1.
- ***Horní*** (také ***pravou***) ***trojúhelníkovou maticí*** nazýváme čtvercovou matici $\mathbf{A} = (a_{ik})$, jestliže pod hlavní diagonálou jsou všechny prvky nulové, tzn. $\forall i > k : a_{ik} = 0$.
- ***Dolní*** (také ***levou***) ***trojúhelníkovou maticí*** nazýváme čtvercovou matici $\mathbf{A} = (a_{ik})$, jestliže nad hlavní diagonálou jsou všechny prvky nulové, tzn. $\forall i < k : a_{ik} = 0$.

Definice

Transponovanou maticí k matici $\mathbf{A}$ typu (m,n) nazýváme matici $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ typu (n,m) takovou, kterou dostaneme z matice $\mathbf{A}$ záměnou (transpozicí) řádků a sloupců. Označíme-li prvek v *i*-tém řádku a *k*-tém sloupci transponované matice a_{ik}^{T}, pak můžeme psát: $a_{ik}^{\mathrm{T}} = a_{ki}$. Jinak řečeno, transponovaná matice $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ vznikne „překlopením“ matice $\mathbf{A}$ kolem její hlavní diagonály.

Věta

Pro transpozici matic platí $\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$.

Definice

Pokud pro čtvercovou matici $\mathbf{A}$ platí rovnost $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$, hovoříme o ***symetrické*** (***souměrné***) matici.

Pokud pro čtvercovou matici $\mathbf{A}$ platí rovnost $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{A}$, hovoříme o ***antisymetrické*** matici.

Poznámka

Je zřejmé, že pro prvky symetrické matice platí $a_{ik} = a_{ki}$. Obdobně pro prvky antisymetrické matice platí $a_{ik} = -a_{ki}$, odkud dále plyne, že diagonální prvky antisymetrické matice musí být nulové.

Hodnost matice

Definice

Hodností $h = h(\mathbf{A})$ ***matice*** $\mathbf{A}$ typu (m,n) nazýváme maximální počet lineárně nezávislých řádků matice $\mathbf{A}$.

Věta

- $h(\mathbf{A}) = h\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)$. Odtud plyne, že v definici hodnosti můžeme hovořit o sloupcích místo o řádcích.
- $h(\mathbf{A}) \leq \min\{m,n\}$ neboli hodnost matice je menší nebo rovna menšímu číslu z počtu řádků a sloupců.

Věta
Hodnost matice se nezmění provedením následujících, tzv. ***elementárních úprav***:
- Přehozením pořadí řádků (sloupců).
- Vynásobením některého řádku (sloupce) číslem různým od nuly.
- Přičtením lineární kombinace ostatních řádků (sloupců) k vybranému řádku (sloupci).
- Přidáním nebo vynecháním řádku (sloupce), který je lineární kombinací ostatních řádků (sloupců).

Definice (*ekvivalence matic*)
O matici $\mathbf{B}$, která je stejného typu jako matice $\mathbf{A}$ a vznikla z matice $\mathbf{A}$ elementárními úpravami, říkáme, že je ***ekvivalentní s maticí*** $\mathbf{A}$. Zapisujeme $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Věta
Ekvivalentní matice mají stejnou hodnost.

Operace s maticemi

Definice
Matice $\mathbf{C}$ je ***součtem matic*** $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ právě tehdy, jsou-li všechny tři matice téhož typu a platí-li, že každý prvek matice $\mathbf{C}$ je součtem stejnolehlých prvků matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.
Matematický zápis:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \Leftrightarrow \forall i,k : c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}.$$

Věta
Pro sčítání matic obecně platí:
- $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$ (asociativnost).
- $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (komutativnost).
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$.

Definice (*násobení matice číslem*)
Součinem matice $\mathbf{A} = (a_{ik})$ ***a čísla*** α je matice $\mathbf{B} = (b_{ik})$ stejného typu jako matice $\mathbf{A}$, pro jejíž prvky platí $b_{ik} = \alpha \cdot a_{ik}$. Matematický zápis: $\mathbf{B} = \alpha\mathbf{A} \Leftrightarrow \forall i,k : b_{ik} = \alpha \cdot a_{ik}$.

Věta
Pro násobení matice číslem obecně platí:
- $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$ (distributivnost).
- $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$ (distributivnost).
- $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A} = \alpha\beta\mathbf{A}$ (asociativnost).
- $(\alpha\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = \alpha\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Definice (*násobení matic*)
Součinem matice $\mathbf{A} = (a_{ik})$ typu (m,p) ***a matice*** $\mathbf{B} = (b_{ik})$ typu (p,n) nazýváme matici $\mathbf{C} = (c_{ik})$ typu (m,n), pro jejíž prvky platí: $c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}$. Zapisujeme $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ nebo i s tečkou $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

Poznámka

- Součin matic je definován pouze tehdy, je-li počet sloupců první (levé) matice roven počtu řádků druhé (pravé) matice.
- Prvek c_{ik} součinu $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ je vlastně *skalárním součinem* i-tého řádku matice $\mathbf{A}$ a k-tého sloupce matice $\mathbf{B}$.
- Máme-li součin $\mathbf{AB}$, říkáme, že matice $\mathbf{A}$ násobí matici $\mathbf{B}$ *zleva* nebo také, že matice $\mathbf{B}$ násobí matici $\mathbf{A}$ *zprava*. Toto rozlišení je nutné, neboť *neplatí komutativní zákon*, tzn. obecně $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Věta

Pro násobení matic platí:

- $\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}$ (jednotkovým prvkem je jednotková matice).
- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$, $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$ (distributivnost).
- $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{ABC}$ (asociativnost).
- $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

A4.3 Determinanty

Definice

Determinantem čtvercové matice $\mathbf{A} = (a_{ik})$ řádu n nazýváme číslo $\det \mathbf{A} \equiv \sum_P z(P) a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n}$, kde sčítáme přes všechny *permutace P* množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Veličina $z(P)$ je znaménko permutace *P*.

Poznámka

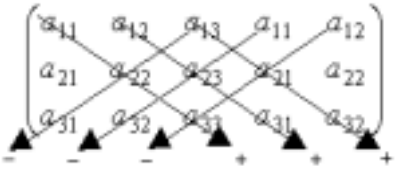
- Znaménko permutace *P* je dáno vztahem $z(P) = (-1)^r$, kde *r* je počet tzv. *inverzí* v permutaci *P*. Inverzí v permutaci $P = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ nazýváme každou dvojici (k_i, k_j), pro kterou platí $(i < j) \wedge (k_i > k_j)$. Pokud je číslo *r* sudé, hovoříme o *sudé permutaci* a její znaménko je rovno 1, pokud je *r* liché, jedná se o *lichou permutaci* a její znaménko je rovno –1. Např. permutace $P = (3, 1, 2, 5, 4)$ je lichá, protože obsahuje 3 inverze: $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(5, 4)$.
- Kromě uvedeného značení pomocí symbolu „det“ se v praxi často používá také řeckého písmene Δ (většinou s nějakým rozlišujícím indexem, např. Δ_1 nebo Δ_x apod.). Jinou možností je zápis analogický zápisu matice, kdy kulaté závorky nahrazují svislé čáry jako u absolutní hodnoty. Např. symbol $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$ označuje determinant matice $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.
- Sčítance $z(P) a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n}$ se nazývají ***členy determinantu***. Z definice determinantu je zřejmé, že každý člen determinantu $\det \mathbf{A}$ obsahuje součin *n* prvků matice $\mathbf{A}$, přičemž *z každého řádku a sloupce matice* $\mathbf{A}$ *je vybrán právě jeden prvek.*

Definice

Subdeterminantem (***minorem***) *k-tého řádu matice* $\mathbf{A}$ *typu* (m,n) nazýváme determinant matice, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ vypuštěním tolika řádků a sloupců, aby z ní zbyla čtvercová matice *k*-tého řádu.

Věta (*výpočet determinantů*)

- Pro matici prvního řádu $\mathbf{A} \equiv (a_{11})$ platí: $\det \mathbf{A} = a_{11}$. Determinantem je tedy hodnota jediného prvku této matice.
- Determinant matice druhého řádu: $\det \mathbf{A} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
- Pro výpočet determinantu matice třetího řádu se používá schéma zvané ***Sarrusovo pravidlo***: K matici $\mathbf{A}$ připíšeme první dva sloupce (obdobně je možné formulovat toto pravidlo pro řádky) a pak provádíme součiny po přímých čárách tak, jak je naznačeno na obrázku, přičemž ve směru zleva doprava je znaménko kladné, ve směru zprava doleva záporné.



Poznámka
Výpočet determinantů matic čtvrtého a vyšších řádů není vhodné provádět přímo podle definice (ani v počítačových programech), protože počet členů je příliš velký a výpočetní čas rychle roste s řádem matice. Proto se používá jiných metod, založených na vybraných vlastnostech determinantů.

Věta (*vlastnosti determinantů*)

- $\det \mathbf{E} = 1$.
- $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.
- $\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$ (pro čtvercové matice téhož řádu).
- Zaměníme-li v matici navzájem dva řádky nebo dva sloupce, změní determinant znaménko.
- Společného nenulového činitele jednoho řádku nebo sloupce lze vytknout před determinant.
- Determinant je roven nule právě tehdy, jestliže prvky alespoň jednoho řádku (sloupce) jsou rovny nule nebo jestliže nějaký řádek (sloupec) je lineární kombinací ostatních řádků (sloupců).
- Determinant se nezmění, přičteme-li k libovolnému řádku (sloupci) jakoukoliv lineární kombinaci ostatních řadků (sloupců).

Definice

Algebraickým doplňkem prvku a_{ik} matice $\mathbf{A} \equiv (a_{ik})$ nazýváme číslo $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$, kde M_{ik} je subdeterminant (minor) vzniklý z matice $\mathbf{A}$ vynecháním *i*-tého řádku a *k*-tého sloupce.

Věta (*rozvoj determinantu podle prvků jedné řady*)

Rozvoj determinantu podle *i*-tého řádku: $\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$.

Rozvoj determinantu podle *k*-tého sloupce: $\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$.

Symbol A_{ik} označuje algebraický doplněk prvku a_{ik}.

Poznámka

- Věta převádí výpočet determinantu n-tého řádu na výpočet n determinantů (n-1)-ho řádu. Počet členů determinantu a jeho výpočetní náročnost se tím obecně nemění.
- V praxi je výhodné počítat determinant rozvojem podle prvků té řady, která obsahuje nejvíce nulových prvků. Pak se totiž nemusí počítat příslušné determinanty nižšího řádu a to vede k významnému urychlení výpočtu.
- Navíc, před vlastním výpočtem determinantu je možné ve vybrané řadě vynulovat co nejvíce prvků použitím úprav, které nemění hodnotu determinantu (viz výše). „Maximálním programem“ je převést matici na trojúhelníkovou, tzn. vynulovat všechny prvky pod nebo nad hlavní diagonálou.

Věta

Determinant trojúhelníkové (horní nebo dolní) matice je roven součinu jejích hlavních prvků.

Důkaz

Uvažujme např. dolní trojúhelníkovou matici $\mathbf{A} \equiv (a_{ik})$ řádu n. V prvním řádku této matice může být pouze jediný nenulový prvek, diagonální prvek a_{11}. Rozvoj jejího determinantu podle prvního řádku má tedy pouze jeden člen: $\det \mathbf{A} = a_{11}A_{11}$. Algebraický doplněk $A_{11} \equiv (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$ je roven determinantu matice vzniklé z matice $\mathbf{A}$ odstraněním prvního řádku a prvního sloupce. Tato matice je řádu o jedna menšího a je rovněž dolní trojúhelníková. Můžeme tudíž provést analogický rozvoj jejího determinantu podle prvního řádku. Opakováním provedených úvah dojdeme až k jednoprvkové matici (a_{nn}) (jejíž determinant je roven jejímu jedinému prvku) a odtud k závěrečnému vyjádření $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}...a_{nn}$.

Definice

Matice, jejíž determinant je různý od nuly, se nazývá ***regulární***. V opačném případě hovoříme o matici ***singulární***.

Řešení soustav lineárních rovnic

<u>Definice</u>

Nechť je dána soustava m lineárních rovnic o n neznámých: $\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & a_{2n}x_n = & b_2 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \dots & a_{mn}x_n = & b_m \end{array}$.

- Matici $\mathbf{A} = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ typu (m,n) nazýváme ***maticí soustavy***.

- Matici $\mathbf{A}' \equiv (a_{ik};\ b_k) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}, & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}, & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}, & b_m \end{pmatrix}$ typu $(m,n+1)$ nazýváme ***rozšířenou maticí soustavy***.

- Sloupcovou matici $\mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, ..., x_n)^{\mathrm{T}}$, resp. $\mathbf{b} \equiv \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = (b_1, b_2, ..., b_m)^{\mathrm{T}}$, nazýváme ***vektor*** (***sloupec***) ***neznámých***, resp. ***vektor*** (***sloupec***) ***pravých stran***.

Věta
Soustavu m lineárních rovnic o n neznámých můžeme zapsat v ***maticovém tvaru*** $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Věta (*Frobeniova*)
Soustava lineárních rovnic je řešitelná právě tehdy, má-li matice soustavy $\mathbf{A}$ a rozšířená matice soustavy $\mathbf{A}'$ stejnou hodnost h. Pak pro $h = n$ existuje právě jedno řešení, pro $h < n$ existuje řešení nekonečně mnoho.

Poznámka
- Pro homogenní soustavu rovnic, tj. soustavu, jejíž vektor pravých stran $\mathbf{b}$ je nulovým vektorem, z uvedené věty plyne, že má vždy aspoň jedno řešení (protože matice rozšířená se od matice soustavy liší přidáním nulového sloupce a tato operace nemění hodnost).
- Uvážíme-li platnost relace $h(A) \le \min(m,n)$, platí v případě, kdy soustava má řešení, tj. kdy $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}') = h$, nerovnost $h \le m$. Jestliže je tato nerovnost v konkrétním případě ostrá, tj. $h < m$, znamená to, že soustava obsahuje pouze h signifikantních rovnic a zbytek ($m - h$) jsou rovnice, které z těchto rovnic vyplývají a můžeme je jako nadbytečné vypustit.
- Případ, kdy soustava nemá žádné řešení, tj. kdy $h(\mathbf{A}) \ne h(\mathbf{A}')$, nastává právě tehdy, když se v soustavě vyskytuje aspoň jedna rovnice, která je nekompatibilní s ostatními (rovnice se navzájem vylučují).

Věta (*Cramerovo pravidlo*)
Jestliže determinant matice soustavy n lineárních rovnic o n neznámých je různý od nuly ($\det \mathbf{A} \equiv \Delta \ne 0$), pak má soustava právě jedno řešení $\left(x_1,\ x_2, \ldots, x_n\right)^{\mathrm{T}}$, kde $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ a Δ_i je determinant matice, která vznikne z matice soustavy $\mathbf{A}$ tak, že v ní i-tý sloupec nahradíme vektorem pravých stran $\mathbf{b}$.

A4.4 Matice (druhá část)

Inverzní matice

Definice
Inverzní maticí k čtvercové matici $\mathbf{A}$ nazýváme (pokud existuje) takovou matici $\mathbf{A}^{-1}$ stejného typu, pro kterou platí $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$, kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice.

Věta
Následující výroky jsou ekvivalentní:
- Inverzní matice k matici $\mathbf{A}$ řádu n existuje.
- Hodnost matice $\mathbf{A}$ je rovna jejímu řádu, tj. $h(\mathbf{A}) = n$.
- Determinant matice $\mathbf{A}$ je různý od nuly.

Poznámka
Vidíme, že regulární matici můžeme definovat třemi způsoby: $\det \mathbf{A} \ne 0 \Leftrightarrow h(\mathbf{A}) = n \Leftrightarrow \exists \mathbf{A}^{-1}$.

Věta (*vlastnosti inverzní matice*)

$$\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}},\ \det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \equiv \left(\det \mathbf{A}\right)^{-1},\ \left(\mathbf{AB}\right)^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

Důkaz
Důkaz druhého vzorce je velmi snadný:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \Rightarrow \det \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \det \mathbf{E} \Rightarrow \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{A}^{-1} = 1 \Rightarrow \det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}.$$

Věta (*výpočetní tvar inverzní matice*)
Inverzní matici k regulární matici $\mathbf{A} \equiv (a_{ik})$ řádu n lze vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (A_{ik})^{\mathrm{T}},$$

kde A_{ik} je algebraický doplněk prvku a_{ik}.

Poznámka

- Matici $(A_{ik})^{\mathrm{T}}$, tj. transponované matici algebraických doplňků, se říká ***matice adjungovaná***.
- K určení inverzní matice se kromě uvedeného výpočtu pomocí adjungované matice používá (zejména pro vyšší řády) tzv. ***Gaussovy metody***. Tato metoda je založena na tom, že k inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ lze přejít pomocí pouze řádkových (nebo pouze sloupcových) elementárních úprav matice $\mathbf{A}$, přičemž nejprve se snažíme dostat jednotkovou matici $\mathbf{E}$ a pak aplikací týchž elementárních úprav ve stejném pořadí přejdeme od matice $\mathbf{E}$ k inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$. V praxi vždy vystačíme se třemi operacemi: přičtením lineární kombinace řádků k jinému řádku, vynásobením řádku číslem různým od nuly a přehozením pořadí řádků. Pokud není možno uvedeným postupem obdržet matici $\mathbf{E}$, je matice $\mathbf{A}$ singulární.

Příklad
Invertujte matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
Řešení:

- Pomocí adjungované matice: Matice algebraických doplňků je $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, po transpozici $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, dále snadno spočítáme det $\mathbf{A}$=$2 \cdot 3 - (-2) \cdot 1 = 8$. Tudíž $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
- Gaussovou metodou: Matici $\mathbf{A}$ a jednotkovou matici $\mathbf{E}$ si napíšeme vedle sebe (do tzv. blokové matice) a elementární úpravy provádíme současně na obou maticích:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -8 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -8 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -8 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/8 & 2/8 \\ 0 & 1 & -1/8 & 2/8 \end{array}\right) = (\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1}).$$

Celočíselná mocnina matice

Definice (*mocniny matic*)
Pro čtvercovou regulární matici $\mathbf{A}$ definujeme celočíselnou mocninu takto ($n \in \mathbb{N}$):

- $\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}\dots\mathbf{A}}_{n \text{ činitelů}}$, tzn. jako opakované násobení n stejných matic.
- $\mathbf{A}^{-n} = \underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\dots\mathbf{A}^{-1}}_{n \text{ činitelů}}$, tzn. jako opakované násobení n inverzních matic .
- $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$.

Věta
Obdobně jako pro číselné mocniny platí: $\mathbf{A}^m\mathbf{A}^n = \mathbf{A}^{m+n}$, $m,n \in Z$.

Stopa matice

Definice
Stopou čtvercové matice $\mathbf{A} \equiv (a_{ik})$ řádu n nazýváme *součet* jejích hlavních prvků:

$$\mathrm{Tr}\,\mathbf{A} \equiv \mathrm{Sp}\,\mathbf{A} \equiv a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}\,.$$

Poznámka
Označení „Tr“ pochází z anglického „trace“, označení „Sp“ z německého „Spur“.

Vlastní čísla a vektory matice

Definice
Nechť je dána čtvercová matice $\mathbf{A}$ řádu n a nenulový vektor (sloupcová matice) $\mathbf{u}$ typu $(n,1)$. Platí-li $\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{u}$ (tzn. vynásobení vektoru $\mathbf{u}$ zleva maticí $\mathbf{A}$ je ekvivalentní vynásobení vektoru $\mathbf{u}$ určitým číslem λ), nazýváme vektor $\mathbf{u}$ ***vlastním*** (***charakteristickým***) ***vektorem*** matice $\mathbf{A}$ a číslo λ příslušným ***vlastním*** (***charakteristickým***) ***číslem*** matice $\mathbf{A}$.

Definice
Charakteristickou maticí čtvercové matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ nazýváme matici

$$\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix},$$

kde veličina λ je reálná nebo komplexní proměnná.

Poznámka
Charakteristická matice je zřejmě funkcí proměnné λ.

Definice
Polynom $\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})$ n-tého řádu v proměnné λ, tj. determinant matice charakteristické k matici $\mathbf{A}$, nazýváme ***charakteristickým polynomem***.

Věta (*výpočet vlastních čísel*)
- Vlastními čísly matice $\mathbf{A}$ jsou kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ charakteristického polynomu $\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})$.
- Charakteristická čísla trojúhelníkové matice jsou rovna prvkům v hlavní diagonále (hlavním prvkům).

Definice (*podobnost matic*)
Čtvercové matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ téhož řádu nazýváme podobnými, existuje-li taková matice $\mathbf{P}$, že platí $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

Věta
Podobné matice mají stejný charakteristický mnohočlen, stejná vlastní čísla a stejnou stopu.

Definice
- ***Hermitovskou*** (***hermitovsky symetrickou***) maticí nazýváme matici, pro niž $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \overline{\mathbf{A}}$, neboli $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}} \equiv \mathbf{A}^{+}$ (pruh značí komplexní sdružení, horní index + tzv. ***hermitovské sdružení***, tzn. současnou transpozici matice a její komplexní sdružení).
- ***Ortogonální maticí*** rozumíme matici, pro kterou platí $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.
- ***Unitární maticí*** rozumíme matici, pro kterou platí $\mathbf{A}^{-1} = \overline{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}} \equiv \mathbf{A}^{+}$.

Věta
- Vlastní čísla hermitovské (hermitovsky symetrické) matice jsou reálná.
- Vlastní čísla reálné symetrické matice jsou reálná.
- Modul (absolutní hodnota) každého vlastního čísla unitární matice je roven jedné.
- Vlastní vektory hermitovské (hermitovsky symetrické) matice příslušné různým vlastním číslům jsou navzájem ortogonální.
- Vlastní vektory unitární matice, příslušné různým vlastním číslům, jsou navzájem ortogonální.
- Nechť $\mathbf{A}$ je hermitovská (hermitovsky symetrická) matice. Pak existuje unitární matice $\mathbf{U}$ taková, že matice $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$ je diagonální (a reálná).
- Nechť $\mathbf{A}$ je reálná symetrická matice. Pak existuje reálná ortogonální matice $\mathbf{P}$ taková, že matice $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ je diagonální (a samozřejmě také reálná).

A5 Křivočaré souřadnice

V tomto apendixu se zabýváme obecnými souřadnicovými soustavami na $\mathbb{R}^n$ a budeme pracovat s veličinami s jedním nebo i více indexy. Aniž to budeme explicitně uvádět, tyto indexy mohou nabývat hodnot $1, ..., n$. V zájmu formálního zjednodušení uváděných vztahů budeme důsledně využívat Einsteinovu sumační konvenci[1].

Definice

Označme $x_1,...,x_n$ kartézské souřadnice na $\mathbb{R}^n$. Nechť je definováno spojitě diferencovatelné a vzájemně jednoznačné zobrazení $\boldsymbol{\phi}:\Omega \to \mathbb{R}^n$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$

$$x_i = \phi_i(\xi_1,...,\xi_n).$$

Pak n-tice čísel $[\xi_1,...,\xi_n]$ nazveme ***křivočarými souřadnicemi*** na $\mathbb{R}^n$.

Poznámka

Obvykle budeme používat zkrácené názvy *kartézské souřadnice* x_i a *křivočaré souřadnice* ξ_i. Vždy budeme mít ale na mysli odpovídající uspořádané n-tice $[x_1,...,x_n]$ a $[\xi_1,...,\xi_n]$.

Přechod mezi kartézskými a křivočarými souřadnicemi je dán zobrazením $\boldsymbol{\phi}$, $x_i = \phi_i(\xi_1,...,\xi_n)$. V následujícím výkladu budeme pro jednoduchost psát $x_i = x_i(\xi_1,...,\xi_n)$, jak je to běžné v přírodních a technických vědách, nebo dokonce stručněji $x_i = x_i(\xi_j)$.

Protože zobrazení $\boldsymbol{\phi}$ je podle předpokladu prosté, je možno pro zadané kartézské souřadnice zvoleného bodu najít odpovídající souřadnice křivočaré jednoznačně – $\xi_j = \phi_j^{-1}(x_1,...,x_n)$. V dalším ovšem budeme používat stručnější zápis $\xi_j = \xi_j(x_i)$.

Definice

Nechť $x_j^{(0)}$ jsou kartézské souřadnice pevně zvoleného bodu z $\mathbb{R}^n$ a $\xi_j^{(0)}$ jeho křivočaré souřadnice. Pak křivku

$$x_i = x_i\left(\xi_1^{(0)},...,\xi_{k-1}^{(0)},\xi_k,\xi_{k+1}^{(0)},...,\xi_n^{(0)}\right)$$

nazveme ***k-tou souřadnicovou čárou*** v bodě $\mathbf{x}^{(0)}$.

Poznámka

Pohybujeme-li se po k-té souřadnicové čáře, mění se pouze k-tá křivočará souřadnice ξ_k, zatímco ostatní zůstávají neměnné. Souřadnicové čáry tedy hrají v křivočaré souřadnicové soustavě roli os souřadnic kartézských. Je-li ovšem zobrazení $\boldsymbol{\phi}$ nelineární, nejedná se o přímky, ale o „křivé čáry“. Odtud pochází tedy název křivočaré souřadnice.

Poznámka

Od kartézských souřadnic na $\mathbb{R}^n$ je možno přejít k souřadnicově invariantnímu zápisu, uvědomíme-li si, že $\mathbb{R}^n$ je lineární vektorový prostor a kartézské souřadnice x_k jsou souřadnicemi vzhledem k speciálně zvolené ortonormální bázi $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, kde

$$\mathbf{e}_1 \equiv [1,0,...,0],$$

[1] Podle ***Einsteinovy sumační konvence*** sčítáme automaticky přes všechny indexy, které se v daném výrazu vyskytnou právě dvakrát. Tak např. pod $a_i b_i$ rozumíme $\sum_{i=1}^n a_i b_i$, místo $A_{ij}x_j$ bychom měli psát $\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j$ apod.

$$\mathbf{e}_2 \equiv [0,1,...,0],$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{e}_n \equiv [0,0,...,1].$$

Pak je ovšem možno pro polohový vektor libovolného bodu psát

$$\mathbf{x} = x_i\left(\xi_j\right)\mathbf{e}_i .$$

Poznámka
Z toho, co bylo uvedeno v kapitole 5.1, plyne, že vektor

$$\boldsymbol{\tau}_k \equiv \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}\left(\xi_j^{(0)}\right)\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_k}\left(\xi_j^{(0)}\right)$$

je tečným vektorem ke k-té souřadnicové čáře v bodě $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}(\xi_j^{(0)})$. Jeho souřadnice v kartézské bázi $\mathbf{e}_i$ odpovídají elementům k-tého sloupce Jacobiho matice

$$J_{ik} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}$$

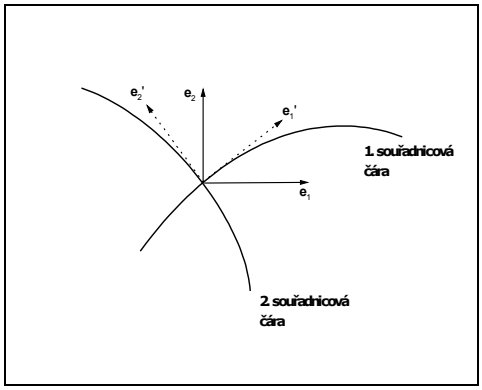
a ta má podle předpokladu o prostotě zobrazení $x_i = x_i(\xi_j)$ sloupce lineárně nezávislé. Musí tedy nutně platit

- $\|\boldsymbol{\tau}_k\| \neq 0$,
- vektory $\boldsymbol{\tau}_k$ jsou lineárně nezávislé.

Vektory $\boldsymbol{\tau}_k$ tvoří proto rovněž bázi na $\mathbb{R}^n$, obecně však odlišnou od kartézské báze $\mathbf{e}_i$. Tyto vektory je možno navíc normovat

$$\mathbf{e}_k' \equiv \frac{\boldsymbol{\tau}_k}{\|\boldsymbol{\tau}_k\|}$$

a získat tak novou bázi na $\mathbb{R}^n$ tvořenou opět vektory jednotkové délky. Vše je shrnuto do následujícího obrázku:



Definice

Soustavu vektorů $\mathbf{e}_k'$ nazýváme ***lokální křivočarou bází***.

Poznámka
Lokální křivočará báze se mění místo od místa. V různých bodech $\mathbb{R}^n$ mají vektory $\mathbf{e}_k'$ obecně různý směr. Proto název lokální, který má tuto vlastnost zdůraznit.

Definice

Tvoří-li vektory $\mathbf{e}_k'$ v každém bodě $\mathbb{R}^n$ ortogonální soustavu, nazveme odpovídající křivočaré souřadnice ***ortogonálními křivočarými souřadnicemi***.

Poznámka ***(rozklad vektoru do lokální křivočaré báze)***
Nechť je $\mathbf{x}^{(0)}$ bod z $\mathbb{R}^n$. Libovolný vektor $\mathbf{a}$ vázaný v tomto bodě můžeme tedy rozložit jak do báze $\mathbf{e}_k$, tak i do báze $\mathbf{e}_k'$:

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i = a_i' \mathbf{e}_i' .$$

Pro lokální křivočarou bázi můžeme ovšem psát

$$\mathbf{e}_i' = \varepsilon_{ji} \mathbf{e}_j ,$$

kde

$$\varepsilon_{ji} = \frac{\tau_{ij}}{\|\boldsymbol{\tau}_i\|} = \left(\sqrt{\sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial x_r}{\partial \xi_i} \left(\xi_s^{(0)} \right) \right)} \right)^{-1} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} \left(\xi_s^{(0)} \right) .$$

Platí tedy

$$a_i' \mathbf{e}_i' = \left(a_i' \varepsilon_{ji} \right) \mathbf{e}_j = a_j \mathbf{e}_j ,$$

a proto i

$$a_j = \varepsilon_{ji} a_i' .$$

Tím jsme získali velmi důležitý vztah převádějící souřadnice vektoru $\mathbf{a}$ v lokální křivočaré bázi do báze kartézské (a po invertování matice ε_{ij} i naopak).

Poznámka ***(metrický tenzor)***
Nechť $\mathbf{x}^{(0)}$ a $\mathbf{x}^{(0)}+d\mathbf{x}$ jsou dva infinitezimálně blízké body z $\mathbb{R}^n$, jimž odpovídají křivočaré souřadnice $\xi_j^{(0)}$ a $\xi_j^{(0)} + d\xi_j$. Pak zřejmě platí

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} (\xi_r^{(0)}) d\xi_j .$$

Pro druhou mocninu vzdálenosti těchto dvou bodů můžeme psát

$$ds^2 \equiv dx_i dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} (\xi_r^{(0)}) \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} (\xi_r^{(0)}) \; d\xi_j d\xi_k = g_{jk} d\xi_j d\xi_k ,$$

kde jsme zavedli

$$g_{jk}(\xi_r^{(0)}) = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} (\xi_r^{(0)}) \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} (\xi_r^{(0)}) .$$

Veličina g_{jk} zadává metrické vlastnosti křivočaré souřadnicové soustavy, nazývá se proto obvykle ***metrickým tenzorem***.

Poznámka ***(nejdůležitější ortogonální křivočaré souřadnice v rovině a v prostoru)***
Polární souřadnice v rovině ($\mathbb{R}^2$) $r \geq 0$ a $\phi \in \langle 0, 2\pi)$ souvisejí s kartézskými souřadnicemi x a y prostřednictvím vztahů $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$.

Válcové (cylindrické) souřadnice v prostoru ($\mathbb{R}^3$) $r \geq 0$, $\phi \in \langle 0, 2\pi)$ a $z \in (-\infty, +\infty)$ jsou prostorovou analogií souřadnic polárních a definujeme je vztahy $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $z = z$.[1]

Kulové (sférické) souřadnice v prostoru ($\mathbb{R}^3$) $r \geq 0$, $\phi \in \langle 0, 2\pi)$ a $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$ souvisejí s kartézskými souřadnicemi prostřednictvím vztahů $x = r\cos\phi\sin\theta$, $y = r\sin\phi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$.

[1] Kartézská souřadnice z je totožná s cylindrickou. Užíváme proto pro ně stejné označení.