1 Diferenciální počet funkcí jedné reálné proměnné

1.1 Spojitost a limity

Definice
Δ-okolím bodu $a \in \mathbb{R}$ [1] nazýváme interval $(a-\Delta, a+\Delta)$. ***Redukovaným Δ-okolím*** bodu $a \in \mathbb{R}$ nazýváme sjednocení intervalů $(a-\Delta, a) \cup (a, a+\Delta)$.

Spojitost

Definice
Nechť je funkce f definována na nějakém okolí bodu a. Řekneme, že funkce f je ***v bodě a spojitá***, právě když

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathrm{D}_f \text{ platí } |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

Dále řekneme, že funkce f je ***spojitá na otevřeném intervalu*** $(a,b) \subset \mathrm{D}_f$, pokud je spojitá v každém bodě uvedeného intervalu.

Poznámka
Definice spojité funkce popisuje matematicky přesně to, co máme na mysli, když říkáme, že graf funkce je reprezentován nepřerušovanou (spojitou) křivkou. To jest takovou křivkou, kterou můžeme nakreslit, aniž zvedneme tužku z papíru nebo křídu z tabule.

Limity

Definice (***vlastní limita ve vlastním bodě***)
Nechť je funkce f definována na nějakém redukovaném okolí bodu a. Řekneme, že funkce f má v bodě a ***vlastní limitu*** A $(A \in \mathbb{R})$, právě když

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathrm{D}_f \text{ platí } 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Zkráceně tento fakt zapisujeme symbolem $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Poznámka
Všimněte si, že funkce f nemusí být v bodě a, v němž vyšetřujeme její limitu, vůbec definována. Výše uvedená definice totiž popisuje pouze, kam „směřují“ funkční hodnoty f, když se s nezávislou proměnnou x blížíme neomezeně blízko bodu a (aniž jej ovšem dosáhneme). Pokud je funkce f v bodě a definována, nemusejí být obecně její funkční hodnota a její limita v tomto bodě totožné.

Poznámka
Všimněte si, že spojitost funkce f v bodě a můžeme vyjádřit zkráceně vztahem

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) .$$

[1] Symbolem $\mathbb{R}$ označujeme množinu všech reálných čísel.

Definice (***nevlastní limity ve vlastním bodě***)
Nechť je funkce f definována na nějakém redukovaném okolí bodu a.

Řekneme, že funkce f má v bodě a ***nevlastní limitu*** $+\infty$, právě když

$$\forall K > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathrm{D}_f \text{ platí } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > K .$$

Zkráceně tento fakt vyjadřujeme symbolem $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Řekneme, že funkce f má v bodě a ***nevlastní limitu*** $-\infty$, právě když

$$\forall K < 0\, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathrm{D}_f \text{ platí } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < K .$$

Zkráceně tento fakt vyjadřujeme symbolem $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Poznámka
Definice nevlastních limit popisuje situaci, kdy funkční hodnoty funkce f rostou nade všechny meze, nebo pod všechny meze klesají, pokud se její nezávislá proměnná blíží k hodnotě a.

Poznámka
Zatím jsme v definicích limity předpokládali, že se nezávislá proměnná blíží k zadané hodnotě z obou stran současně - zleva i zprava. Často bývá užitečné umět popsat situaci, kdy je toto přibližování jednostranné, tj. buď zleva, nebo zprava. Pak hovoříme o ***jednostranných limitách***. Uveďme si jejich přesné definice na příkladu vlastní limity. Zobecnění na případ limit nevlastních je pak přímočaré.

Definice (***jednostranné vlastní limity ve vlastním bodě***)
Nechť je funkce f definována na otevřeném intervalu $(a - \Delta, a)$, kde a je reálné číslo. Řekneme, že funkce f má v bodě a ***zleva vlastní limitu*** A $(A \in \mathbb{R})$, právě když

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathrm{D}_f \text{ platí } 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Zkráceně tento fakt zapisujeme symbolem $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = A$.

Nechť je funkce f definována na otevřeném intervalu $(a, a + \Delta)$, kde a je reálné číslo. Řekneme, že funkce f má v bodě a ***zprava vlastní limitu*** A $(A \in \mathbb{R})$, právě když

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathrm{D}_f \text{ platí } 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Zkráceně tento fakt zapisujeme symbolem $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = A$.

Poznámka
Má-li funkce f v bodě a limitu (vlastní či nevlastní), má v tomto bodě zřejmě obě jednostranné limity, které jsou navíc této limitě rovny. Naopak, pokud existují obě jednostranné limity a jsou si navzájem rovny, má nutně funkce f v bodě a limitu. Pokud si ale rovny nejsou, limita funkce v daném bodě neexistuje.

Podobně jako jednostranné limity můžeme definovat i ***spojitost funkce zleva a zprava***. Stačí se omezit ve výše uvedené definici spojitosti na hodnoty nezávislé proměnné splňující $0 \le a - x < \delta$ (resp. $0 \le x - a < \delta$). Pokuste se obě definice zformulovat sami!

Poznámka
Kromě chování funkcí v blízkosti reálného bodu a nás často zajímá chování funkce v případě, že se nezávislá proměnná blíží k nekonečnu. Pro tento účel definujeme ***limity v nevlastních bodech*** reálné osy, tj. v $+\infty$ a $-\infty$.

Definice (***vlastní limity v nevlastních bodech***)
Nechť je funkce f definována na intervalu $(b, +\infty)$. Řekneme, že má v $+\infty$ ***vlastní limitu*** A, právě když

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0 : \forall x \in \mathrm{D}_f \ \text{ platí } \ x > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Používáme též zkrácený zápis $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

Nechť je funkce f definována na intervalu $(-\infty, b)$. Řekneme, že má v $-\infty$ ***vlastní limitu*** A, právě když

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M < 0 : \forall x \in \mathrm{D}_f \ \text{ platí } \ x < M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Používáme též zkrácený zápis $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Poznámka
Zcela analogickým způsobem se definují i ***nevlastní limity v nevlastních bodech***. Pokuste se tyto definice (celkem čtyři) zformulovat sami!

Věty o limitách

Věta ***(nerovnost mezi limitami)***
Nechť funkce f a g definované na nějakém redukovaném okolí bodu a splňují pro všechna x z tohoto okolí nerovnost

$$f(x) \le g(x) .$$

Existují-li limity těchto funkcí v bodě a (vlastní či nevlastní), platí

$$\lim_{x \to a} f(x) \le \lim_{x \to a} g(x) .$$

Speciálně tedy můžeme psát

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} g(x) = +\infty ,$$
$$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty .$$

Věta
Nechť funkce f, g a h definované na nějakém redukovaném okolí bodu a splňují pro všechna x z tohoto okolí nerovnost

$$f(x) \le g(x) \le h(x) .$$

Existují-li vlastní limity funkcí f a h v bodě a, které jsou si navíc rovny, existuje v tomto bodě i limita funkce g a platí

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) .$$

Poznámka
Právě uvedené věty o nerovnostech mezi limitami je možno přeformulovat i pro jednostranné limity a limity v nevlastních bodech $(a = \pm\infty)$. Proveďte sami!

Věta (*algebra limit*)

Limity v této větě mohou být vlastní i nevlastní (tj. konečné i nekonečné), ve vlastních i nevlastních bodech (tj. a může nabývat konečných i nekonečných hodnot).[1] Pokud mají výrazy na pravé straně rovností smysl, platí

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) &= \lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x),\\
\lim_{x\to a}\big(f(x)-g(x)\big) &= \lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x),\\
\lim_{x\to a}\big(f(x).g(x)\big) &= \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x),\\
\lim_{x\to a}\big(f(x)/g(x)\big) &= \lim_{x\to a} f(x)/\lim_{x\to a} g(x).
\end{aligned}$$

Poznámka
Věta se velmi snadno pamatuje: *Limita součtu je rovna součtu limit* atd.

Poznámka
Důležitou součástí věty je předpoklad, že pravé strany mají smysl. To především znamená, že limity na pravých stranách existují a navíc limita ve jmenovateli v posledním vztahu je nenulová. Vzhledem k tomu, že tyto limity mohou být obecně nevlastní, musíme respektovat některá speciální ***pravidla pro počítání s nekonečny***:

- $\pm\infty + c = \pm\infty \quad \forall c \in \mathbb{R}$,
- $+\infty + \infty = +\infty$,
- $-\infty + (-\infty) = -\infty - (+\infty) = -\infty$,
- $\pm\infty.c = \pm\infty \quad \forall c \in (0,+\infty)$,
- $\pm\infty.c = \mp\infty \quad \forall c \in (-\infty,0)$,
- $(+\infty).(+\infty) = (-\infty).(-\infty) = +\infty$,
- $(+\infty).(-\infty) = -\infty$,
- $c/(\pm\infty) = 0$.

Výrazy $+\infty - \infty$, $(\pm\infty).0$, $(\pm\infty)/(\pm\infty)$ a $0/0$ nejsou definovány, nemají tudíž smysl! Jejich výsledkem může být v závislosti na charakteru funkcí vyskytujících se v počítaných limitách jakékoliv reálné číslo, $+\infty$ i $-\infty$, nebo prostě výsledek nemusí existovat.

Podobně není definován výraz $A/0$, kde A je nenulové reálné číslo, ani výraz $(\pm\infty)/0$. Možných výsledků je však v těchto případech přece jen trochu méně. K uvedeným neurčitým výrazům vedou totiž limity (často jednostranné) $\lim_{x\to a}\big(f(x)/g(x)\big)$, kde $\lim_{x\to a} f(x) = A$ (resp. $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$) a $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, a výsledky, k nimž můžeme dospět, závisejí pouze na znaménku A (či eventuální nevlastní limity funkce f) a na znaménku funkce g nabývanému na nějakém redukovaném okolí (popř. jednostranném redukovaném okolí) bodu a. Shrnuje je následující tabulka.

	$A > 0$, popř. $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$	$A < 0$, popř. $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$
$g(x) > 0$	$+\infty$	$-\infty$
$g(x) < 0$	$-\infty$	$+\infty$

Mění-li funkce g své znaménko na libovolně malém redukovaném okolí (jednostranném redukovaném okolí) bodu a, příslušná limita (jednostranná limita) neexistuje.

[1] A také pouze jednostranné.

Poznámka
Počítání limit je obvykle poměrně obtížnou záležitostí. U některých funkcí vycházíme přímo z definice. Jindy můžeme použít pravidla pro základní algebraické operace s limitami. Často však musíme použít pokročilejší metody (např. L'Hospitalovo pravidlo), o některých se zmíníme později.

Některé důležité a často používané výsledky, které můžeme získat přímým použitím definic a vět uvedených v této kapitole, jsou

- ***konstantní funkce, lineární funkce, kvadratická funkce a obecně polynomy*** jsou spojité na množině všech reálných čísel[1],
- ***celočíselné mocniny a odmocniny*** jsou spojité na svých definičních oborech,
- ***exponenciální a logaritmické funkce*** jsou spojité na svých definičních oborech,
- ***goniometrické a cyklometrické funkce*** jsou spojité na svých definičních oborech,

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ pro přirozená n	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ pro přirozená n
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ pro n sudá	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$ pro reálná $\alpha > 0$
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ pro n lichá	$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ pro všechna přirozená n
$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ pro přirozená n	$\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$ pro n sudá
$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$ pro n lichá	$\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$ pro n lichá
	$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty$ pro reálná $\alpha > 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ pro reálná $a > 1$	$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$ pro reálná $a < 1$
$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$ pro reálná $a < 1$	$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ pro reálná $a < 1$

- limity ***goniometrických funkcí*** v nevlastních bodech neexistují,

$\lim\limits_{x\to\pi/2^-} \operatorname{tg} x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to\pi^-} \operatorname{cotg} x = -\infty$
$\lim\limits_{x\to\pi/2^+} \operatorname{tg} x = -\infty$	$\lim\limits_{x\to\pi^+} \operatorname{cotg} x = +\infty$

[1] Jejich limity jsou tedy v každém bodě definičního oboru rovny funkčním hodnotám.

1.2 Derivace

Zavedení pojmu derivace bylo inspirováno potřebou řešit některé konkrétními a navýsost praktické problémy jako např.

- určení směrnice tečny ke grafu zadané funkce v zadaném bodě,
- určení okamžitých hodnot rychlosti a zrychlení.

Derivace

Definice
Nechť je funkce $f(x)$ definována na nějakém okolí bodu a. Řekneme, že tato funkce má v bodě a ***vlastní derivaci***, pokud existuje vlastní limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Tuto limitu pak nazýváme ***vlastní derivací funkce f v bodě a*** a užíváme pro ni obvykle označení $f'(a)$ nebo též $\frac{df}{dx}(a)$. Je-li uvedená limita nevlastní, hovoříme o ***nevlastní derivaci funkce f v bodě a***.

Jednostrannou limitu

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \text{ resp. } \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

nazýváme ***derivací funkce f v bodě a zleva***, resp. ***zprava***.

Poznámka
V mnoha učebnicích je derivace funkce f v bodě a definována zcela ekvivalentním způsobem jako

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Definice
O funkcích, které mají v bodě a vlastní derivaci, se často hovoří jako o ***funkcích (jedenkrát) diferencovatelných*** v zadaném bodě. Funkce, které mají vlastní derivaci v každém bodě nějakého otevřeného intervalu, se nazývají ***(jedenkrát) diferencovatelné na intervalu***[1]. Derivaci v libovolném bodě zadaného intervalu pak obvykle značíme $f'(x)$ nebo též $\frac{df}{dx}(x)$.

Věta
Funkce diferencovatelná v zadaném bodě je v tomto bodě spojitá. Funkce diferencovatelná na nějakém otevřeném intervalu je spojitá na tomto intervalu.

Poznámka
Funkce f, která je diferencovatelná na nějakém otevřeném intervalu, má vlastní derivaci v každém jeho bodě. Derivováním získáme tedy z funkce f funkci novou – $f'(x)$. Tu se můžeme pokusit opět derivovat v každém bodě zmíněného intervalu. Ve všech bodech, v nichž bude tento pokus úspěšný, získáme tzv. ***druhou derivaci***

[1] Graf diferencovatelné funkce je na zadaném intervalu hladký a nevyskytují se na něm žádné "rohy".

funkce f – $f''(x)$. Dalším derivováním můžeme získat ***derivaci třetí*** – $f'''(x)$, ***čtvrtou*** – $f^{(4)}(x)$, a obecně až ***derivaci řádu n*** – $f^{(n)}(x)$. O těchto derivacích hovoříme obvykle jako o ***derivacích vyšších***. Používáme pro ně, kromě právě uvedeného, také označení $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$.

Věty o derivacích

Věta (***algebra derivací***)
Pokud mají pravé strany rovností smysl, platí

$$\left(f+g\right)'(a) = f'(a)+g'(a),$$
$$\left(f-g\right)'(a) = f'(a)-g'(a),$$
$$\left(kf\right)'(a) = kf'(a),$$
$$\left(f.g\right)'(a) = f'(a).g(a)+f(a).g'(a),$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a).g(a)-f(a).g'(a)}{g(a)^2}.$$

Věta (***derivace inverzní funkce***)
Nechť má funkce f funkci inverzní a v bodě a existuje její první derivace $f'(a)$, která je nenulová. Pak existuje první derivace funkce f^{-1} v bodě $b = f(a)$ a platí

$$f^{-1'}(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Poznámka
Větu o derivování inverzní funkce (tentokrát v obecném bodě x) můžeme zapsat i ve tvaru

$$f^{-1'}(x) = \left[\frac{1}{f'(y)}\right]_{y=f^{-1}(x)}$$

a číst: *Inverzní funkci derivuj tak, že derivuješ funkci, k níž je tato funkce inverzní, podle její nezávislé proměnné* (zde ji značíme y), *z výsledku udělej reciprokou hodnotu a za proměnnou y nakonec dosaď* $f^{-1}(x)$.

Věta (***derivace složené funkce***)
Nechť funkce g a f mají první derivace $g'(b)$ a $f'(a)$, kde $b = f(a)$. Pak existuje i derivace složené funkce $\left(f \circ g\right)'(a)$ a platí

$$\frac{d\left(f \circ g\right)}{dx}(a) = g'(b).f'(a) \equiv g'(f(a)).f'(a).$$

Poznámka
Větu o derivování složené funkce (v obecném bodě x) můžeme zapsat i ve tvaru

$$f(g(x))' = \left[f'(y)\right]_{y=g(x)}.g'(x)$$

a číst: *Složenou funkci derivuj tak, že nejdříve derivuješ vnější funkci podle její nezávislé proměnné* (zde ji značíme y) *a za proměnnou* y *dosadíš* $g(x)$, *a pak vše vynásob derivací vnitřní funkce podle její nezávislé proměnné* (x).

Poznámka
Derivace všech základních funkcí je možno získat ať již přímo pomocí definice, nebo pomocí výše uvedených vět. Shrnuje je následující tabulka.

Derivace elementárních funkcí

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c (= *konst.*)	0	$\cos x$	$-\sin x$
$x^n, \quad n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}	$\sin x$	$\cos x$
$x^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}$	$-nx^{-n-1}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$a^x, \quad a > 0$	$a^x \ln a$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

1.3 Lokální a globální extrémy

V následující kapitole si ukážeme, jak je možno diferenciálního počtu použít při vyšetřování průběhu zadané funkce jedné reálné proměnné. V této kapitole věnujeme pozornost jednomu dílčímu, v aplikacích však velmi významnému problému - nalezení extrémů reálné funkce jedné reálné proměnné.

Lokální extrémy

Definice
Nechť je funkce f definována na okolí bodu a. Řekneme, že tato funkce má v bodě a

- ***lokální maximum*** $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 \ \forall x \in (a-\delta, a+\delta): \quad f(x) \le f(a)$,
- ***ostré lokální maximum*** $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 \ \forall x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta): \quad f(x) < f(a)$,

- ***lokální minimum*** $\Leftrightarrow \exists \delta > 0\ \forall x \in (a-\delta, a+\delta):\quad f(x) \geq f(a)$,
- ***ostré lokální minimum*** $\Leftrightarrow \exists \delta > 0\ \forall x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta):\quad f(x) > f(a)$.

Lokální maximum a lokální minimum nazýváme souhrnně ***lokálními extrémy***, ostré lokální maximum a ostré lokální minimum ***ostrými lokálními extrémy***.

Věta
Nechť má funkce f v bodě a první derivaci. Má-li f v bodě a lokální extrém, je nutně tato derivace nulová.

Věta
Nechť má funkce f v bodě a první a druhou derivaci. Je-li první derivace nulová a druhá derivace nenulová, má funkce f v bodě a ostrý lokální extrém. Je-li $f''(a) < 0$, jedná se o lokální maximum, je-li $f''(a) > 0$, jedná se o lokální minimum.

Poznámka
Předcházející dvě věty nám poskytují návod, jak lokální extrémy reálných funkcí jedné reálné proměnné hledat.

Nejdříve nalezneme body možného výskytu lokálních extrémů řešením rovnice $f'(x) = 0$. *V každém z takto nalezených bodů určíme dále znaménko druhé derivace. Je-li druhá derivace kladná, nabývá studovaná funkce v tomto bodě svého lokálního minima, v opačném případě se jedná o lokální maximum.*

Pokud je však současně nulová první i druhá derivace, nemůžeme o chování funkce poblíž takového bodu na základě výše uvedených vět říci nic určitého a musíme užít věty obecnější:

Věta
Platí-li $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0$ a $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, kde n je liché, nabývá funkce f v bodě a lokálního extrému: pro $f^{(n+1)}(a) > 0$ lokálního minima a pro $f^{(n+1)}(a) < 0$ lokálního maxima. Je-li naopak n sudé, nemá funkce f v bodě a žádný lokální extrém.

Globální extrémy

Definice
Nechť je funkce f definována na nějaké podmnožině reálných čísel $A \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f nabývá v bodě $a \in A$

- ***maxima na A*** $\Leftrightarrow \forall x \in A:\quad f(x) \leq f(a)$,
- ***ostrého maxima na A*** $\Leftrightarrow \forall x \in A \setminus \{a\}:\quad f(x) < f(a)$,
- ***minima na A*** $\Leftrightarrow \forall x \in A:\quad f(x) \geq f(a)$,
- ***ostrého minima na A*** $\Leftrightarrow \forall x \in A \setminus \{a\}:\quad f(x) > f(a)$.

Maxima a minima funkce f na množině A obvykle označujeme souhrnným názvem ***globální extrémy***.

Poznámka
Extrémy zadané funkce vyšetřujme zpravidla na nějakém intervalu reálné osy. Obecně však nemusí funkce ani jeden z extrémů na daném intervalu mít. Pro uzavřené intervaly je však existence globálních extrémů, jak naznačuje následující důležitá věta, zaručena.

Věta
Spojitá funkce nabývá na uzavřeném intervalu svého maxima i minima.

Poznámka
Pokud hledáme ***extrémy funkce f na uzavřeném intervalu*** $\langle a,b\rangle$, je zřejmé, že je musíme hledat buď v krajních bodech a, b, nebo uvnitř tohoto intervalu, tj. v bodech otevřeného intervalu (a,b). V druhém případě se bude ovšem nutně jednat o extrémy lokální. Ve všech bodech (a,b), v nichž má f první derivaci, je nutnou podmínkou pro existenci lokálního extrému její nulovost. Kromě toho se mohou lokální extrémy vyskytovat v bodech, v nichž funkce derivaci nemá nebo je dokonce nespojitá. Jaká je tedy strategie, kterou musíme zvolit při hledání extrémů funkce f na uzavřeném intervalu?

Především nalezneme body, v nichž by funkce mohla extrému nabývat. Mezi ně patří

- *krajní body intervalu,*
- *body, v nichž má studovaná funkce nulovou derivaci,*
- *body, v nichž funkce derivaci nemá nebo je dokonce nespojitá.*

Takových bodů je zpravidla konečně mnoho, obvykle jen několik málo.

Dále sestavíme tabulku funkčních hodnot studované funkce v nalezených bodech. Pomocí této tabulky již můžeme učinit konečné rozhodnutí. V bodech odpovídajících největší funkční hodnotě nabývá funkce svého maxima, v bodech s nejmenší funkční hodnotou pak svého minima. Podle počtu těchto bodů již snadno rozhodneme, zda se jedná o extrémy ostré.

Uvedený postup můžeme zobecnit i na vyšetřování extrémů spojité funkce na konečném sjednocení uzavřených intervalů.

Poznámka
Hledáme-li ***extrémy funkce f na intervalu polouzavřeném či otevřeném***, dozná výše nastíněný postup některých změn. Především musíme z množiny bodů, v nichž můžeme výskyt extrému očekávat, vyloučit krajní body intervalu, které do něj nepatří. Ostatní body zachováme. Podobně jako výše nalezneme v těchto bodech odpovídající funkční hodnoty a porovnáme je. Navíc je ale musíme porovnat i s odpovídajícími jednostrannými limitami funkce v krajních bodech, které do vyšetřovaného intervalu nepatří (pokud ovšem tyto limity existují). Bude-li největší z těchto limit větší než největší funkční hodnota nabývaná v ostatních vyšetřovaných bodech, funkce svého maxima na studovaném intervalu nenabývá. Naopak bude-li největší z těchto limit menší než největší funkční hodnota nabývaná v ostatních bodech, funkce svého maxima na studovaném intervalu v některém z těchto bodů nabývá. Podobné závěry můžeme formulovat i pro existenci či neexistenci minima. Proveďte sami!

Mnohem obtížnější je analýza v případě, že v některém z krajních bodů, které nepatří do vyšetřovaného intervalu, odpovídající jednostranná limita vůbec neexistuje. Pak musíme velmi podrobně vyšetřit chování studované funkce poblíž takového bodu. Jak - na to odpovídá následující kapitola.

1.4 Průběh funkce

Často potřebujeme získat celkovou představu, jak zadaná funkce závisí na své nezávislé proměnné - vyšetřit její průběh. Konečným cílem takového snažení pak obvykle bývá náčrt grafu zkoumané funkce.

Systematické zkoumání funkce zahrnuje několik kroků, které v konečném důsledku umožňují cíle dosáhnout. Jedná se zejména o nalezení:

- *maximálního definičního oboru funkce,*
- *průsečíků s osou x a y,*
- *intervalů, na nichž je funkce spojitá, jakož i bodů nespojitosti,*
- *limit (i jednostranných) v krajních bodech definičního oboru a v bodech, v nichž není funkce spojitá,*

- *intervalů monotonie, tj. intervalů, na nichž je funkce klesající, rostoucí či konstantní,*
- *lokálních extrémů funkce,*
- *intervalů, na nichž je funkce konkávní či konvexní, a inflexních bodů,*
- *asymptot.*

Splnění některých bodů tohoto programu by nemělo činit žádné potíže. Nezbytná vysvětlení, definice a věty byly podány v předcházejících kapitolách nebo jsou známy ze střední školy. V této kapitole si vysvětlíme obsah bodů zbývajících.

Intervaly monotonie

Věta

Nechť je funkce f spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ a má na intervalu (a,b) první derivaci. Pak platí

- $f'(x)>0$ na (a,b) $\Rightarrow$ je f na $\langle a,b\rangle$ rostoucí,
- $f'(x)<0$ na (a,b) $\Rightarrow$ je f na $\langle a,b\rangle$ klesající,
- f je na $\langle a,b\rangle$ neklesající $\Leftrightarrow$ $f'(x)\geq 0$ na (a,b),
- f je na $\langle a,b\rangle$ nerostoucí $\Leftrightarrow$ $f'(x)\leq 0$ na (a,b).

Poznámka

Nalezení intervalů monotonie tedy v praxi znamená řešit nerovnice $f'(x)>0$ a $f'(x)<0$.

Poznámka

Známe-li intervaly monotonie zadané funkce, umíme určit body, v nichž tato funkce nabývá svých lokálních extrémů, popř. charakter těchto extrémů, aniž počítáme její vyšší derivace - tedy tak, jak uvádíme v předcházející kapitole. Je-li funkce v zadaném bodě spojitá, vlevo od něj rostoucí a vpravo klesající, nabývá v něm svého ostrého lokálního maxima. Je-li naopak tato funkce vlevo od zadaného bodu klesající a vpravo od něj rostoucí, nabývá v něm ostrého lokálního minima. V případě funkce vlevo neklesající a vpravo nerostoucí můžeme v zadaném bodě zaručit pouze existenci (neostrého) lokálního maxima a pro funkci vlevo nerostoucí a vpravo neklesající existenci (neostrého) lokálního minima. V ostatních případech funkce v daném bodě extrém nemá.

Konvexnost a konkávnost funkce, inflexní bod

Definice

Nechť je funkce f definována na intervalu $\langle a,b\rangle$. Řekneme, že funkce f je na tomto intervalu

konvexní $\Leftrightarrow \forall x_1,x_2,x_3\in\langle a,b\rangle,\ x_1<x_2<x_3:\ \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq\dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$,

ryze konvexní $\Leftrightarrow \forall x_1,x_2,x_3\in\langle a,b\rangle,\ x_1<x_2<x_3:\ \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$,

konkávní $\Leftrightarrow \forall x_1,x_2,x_3\in\langle a,b\rangle,\ x_1<x_2<x_3:\ \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq\dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$,

ryze konkávní $\Leftrightarrow \forall x_1,x_2,x_3\in\langle a,b\rangle,\ x_1<x_2<x_3:\ \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>\dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$.

Poznámka
Geometricky znamená konvexnost funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$, že pro libovolnou volbu $x_1, x_3 \in \langle a,b\rangle$, $x_1 < x_3$, leží úsečka s koncovými body $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_3, f(x_3)]$ na intervalu $\langle x_1, x_3\rangle$ nad grafem funkce f. Konkávnost naopak znamená, že tatáž úsečka leží pod grafem funkce f.

S menšími nároky na přesnost můžeme též říci, že konvexní funkce zatáčí na zadaném intervalu proti směru hodinových ručiček, konkávní pak ve směru hodinových ručiček.

Věta
Nechť je funkce f spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ a má na (a,b) druhou derivaci. Pak platí

- $f''(x) > 0$ na $(a,b) \Rightarrow$ je f na $\langle a,b\rangle$ ryze konvexní,
- $f''(x) < 0$ na $(a,b) \Rightarrow$ je f na $\langle a,b\rangle$ ryze konkávní,
- f je na $\langle a,b\rangle$ konvexní $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$ na (a,b),
- f je na $\langle a,b\rangle$ konkávní $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0$ na (a,b).

Poznámka
Nalezení intervalů konvexnosti (konkávnosti) funkce f v praxi znamená nutnost řešit nerovnice $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$).

Definice
Nechť má funkce f v bodě a vlastní derivaci. Řekneme, že funkce f má v a ***inflexní bod***, pokud existuje $\Delta > 0$ takové, že platí jedna z následujících podmínek

- $[f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) \ \forall x \in (a-\Delta, a)] \wedge [f(x) < f(a) + f'(a)(x-a) \ \forall x \in (a, a+\Delta)]$,
- $[f(x) < f(a) + f'(a)(x-a) \ \forall x \in (a-\Delta, a)] \wedge [f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) \ \forall x \in (a, a+\Delta)]$.

Poznámka
V inflexním bodě prochází tečna ke grafu studované funkce z jedné jeho strany na stranu druhou.

Je-li v hraničním bodě mezi intervalem, na němž je funkce ryze konvexní, a intervalem, na němž je funkce ryze konkávní, studovaná funkce současně diferencovatelná, je tento bod jejím inflexním bodem. Inflexní body tedy od sebe oddělují konvexní a konkávní oblouky grafu diferencovatelné funkce.

Věta
Má-li funkce v zadaném bodě nulovou druhou derivaci a nenulovou derivaci třetí, má v něm inflexní bod. Obecněji - má-li funkce v zadaném bodě nulové všechny derivace od derivace druhé až do derivace řádu n, kde n je sudé, a nenulovou derivaci řádu $n+1$, má v něm inflexní bod.

Asymptoty

Definice
Funkce má v bodě a ***vertikální asymptotu***, má-li v něm alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní.

Poznámka
Vertikální asymptota v bodě je svislá přímka $x = a$, k níž se graf funkce neomezeně blíží, když se nezávislá proměnná x blíží k a zleva nebo zprava.

Definice
Asymptotou funkce v $+\infty$ rozumíme přímku $y = kx + q$, která splňuje

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - kx - q\right] = 0.$$

Asymptotou funkce v $-\infty$ rozumíme přímku $y = kx + q$, která splňuje

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - kx - q\right] = 0.$$

Poznámka
Asymptoty v nekonečnu se neomezeně blíží ke grafu funkce, pokud nezávislá proměnná roste nade všechny meze nebo klesá pod všechny meze.

Věta
Přímka $y = kx + q$ je asymptotou funkce f v $\pm\infty$, právě když její parametry splňují

$$k_{\pm\infty} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\ q_{\pm\infty} = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - kx\right].$$

1.5 První diferenciál, Taylorův rozvoj

V této kapitole si ukážeme, jak je možno obecnou dostatečně diferencovatelnou funkci nahradit přibližně funkcí jednodušší - polynomem. Tento postup je velmi užitečný v praktických aplikacích a je základem velmi rozšířené metody přibližného řešení obecných, často velmi komplikovaných úloh – tzv. ***poruchového počtu***.

Definice
Symbolem $o(x^n)$ označujeme libovolnou funkci, která splňuje podmínku $\lim_{x\to 0}\left[o(x^n)/x^n\right] = 0$. Jedná se tedy o takovou funkci, která se blíží k nule, pokud se nezávislá proměnná x blíží k nule rychleji než x^n.

První diferenciál

Věta
Nechť je funkce $f(x)$ definována na nějakém okolí bodu a a má v něm první derivaci. Pak je možno na tomto okolí psát

$$f(x) = f(a) + f'(a)\left(x - a\right) + o(x - a).$$

Poznámka
Podle této věty je možno obecnou funkci f nahradit na nějakém malém okolí bodu a, tj. pro ta x, která se od a příliš neliší, jednodušší funkcí lineární[1]. Můžeme tedy pro taková x psát s přibližnou platností

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\left(x - a\right).$$

Chyby, kterých se při této přibližné náhradě dopustíme, budou až druhého řádu, tj. úměrné $\left(x - a\right)^2$. Konkrétní odhady velikosti těchto chyb je možno najít v každé pokročilé učebnici matematické analýzy[2].

[1] Snadno můžeme nahlédnout, že tato náhrada odpovídá v grafickém vyjádření náhradě grafu funkce f na okolí bodu a jeho tečnou v tomto bodě.
[2] Viz např. Jarník [3].

Definice
Výraz $df(x;a) \equiv f'(a)(x-a)$ se nazývá ***prvním diferenciálem*** funkce f v bodě a.

Poznámka
Věta o prvním diferenciálu umožňuje nahradit některé komplikované výrazy výrazy sice přibližnými, leč značně jednoduššími, které se s úspěchem využívají jak při rychlých numerických výpočtech, tak i v rámci poruchového počtu při zjednodušování komplikovaných teoretických schémat. Hovoříme pak, vzhledem k řádu chyb, kterých se těmito úpravami dopouštíme, o ***přiblížení prvního řádu*** nebo též o ***lineárním přiblížení***.

Uveďme si pro ilustraci některé z přibližných výrazů pro počítání s čísly blízkými nule [1]:

$$\frac{1}{1\pm x} \approx 1 \mp x, \qquad \sqrt{1\pm x} \approx 1 \pm \frac{x}{2}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1\pm x}} \approx 1 \mp \frac{x}{2}, \qquad (1\pm x)^{\alpha} \approx 1 \pm \alpha x,$$

$$\sin x \approx x, \qquad \cos x \approx 1, \qquad \operatorname{tg} x \approx x,$$

$$e^{x} \approx 1 + x, \qquad \ln(1+x) \approx x.$$

Taylorův rozvoj

Věta (***Taylorova***)
Nechť je funkce f definována na nějakém okolí bodu a a má v tomto bodě derivace až do řádu n, $n \in \mathbb{N}$, včetně. Pak je možno na tomto okolí psát

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^{k} + o\left((x-a)^{n}\right).$$

Poznámka
Podle této věty je možno na nějakém malém okolí bodu a, tj. pro ta x, která se od a příliš neliší, nahradit obecnou funkci f jednodušším polynomem. Můžeme tedy pro taková x psát s přibližnou platností

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^{k}.$$

Chyby, kterých se při této přibližné náhradě dopustíme, budou až řádu $n+1$, tj. úměrné $(x-a)^{n+1}$. Hovoříme proto o ***přiblížení n-tého řádu***. Konkrétní odhady velikosti těchto chyb je možno najít v každé pokročilejší učebnici matematické analýzy[2].

Poznámka
Všimněte si, že pro $n=1$ přechází Taylorova věta ve větu o prvním diferenciálu. Taylorova věta je tedy zobecněním věty o prvním diferenciálu.

Definice
Pro výraz $T_n(x;f,a) \equiv \sum_{k=0}^{n} (1/k!) f^{(k)}(a)(x-a)$ používáme obvykle název ***Taylorův polynom*** stupně n funkce f v bodě a. Výraz $d^k f(x;a) \equiv \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^{k}$ se někdy též nazývá ***diferenciálem k-tého řádu*** funkce f v bodě a.

[1] Další užitečné vzorce může čtenář najít v libovolné příručce vyšší matematiky, viz např. Rektorys [5].
[2] Viz např. již zmíněný Jarník [3].

Poznámka
Taylorovy rozvoje funkcí významných pro aplikace jsou shrnuty ve všech učebnicích matematické analýzy a souhrnných příručkách a monografiích[1]. Zde uveďme jen některé z nich:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n), \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n), \text{ kde } \alpha \in \mathbb{R} \text{ a } \binom{\alpha}{k} \equiv \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!},$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + o(x^n),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} (-1)^k x^k + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+3}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+2}).$$

1.6 L'Hospitalovo pravidlo

V této kapitole si ukážeme, jak počítat limity, které po bezprostředním použití věty o limitě podílu (viz kapitola 1.1) přecházejí na neurčité výrazy $0/0$ a ∞/∞. Zmíníme se i o některých dalších typech limit, u nichž rovněž není přímá aplikace algebraických pravidel možná.

Věta
Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou funkce diferencovatelné na nějakém okolí bodu a (a může být vlastní i nevlastní), které navíc splňují

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

nebo

$$\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty.$$

Existuje-li $\lim_{x\to a}\left[f'(x)/g'(x)\right]$, pak existuje i $\lim_{x\to a}\left[f(x)/g(x)\right]$ a platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Uvedené limity mohou být i jednostranné.

[1] Viz např. již zmíněná učebnice Jarníkova [3] nebo příručka Rektorysova [5].

Poznámka
Předcházející věta dává návod, jak si poradit s neurčitými limitami typu $0/0$ a v případě druhé podmínky zejména s neurčitými limitami typu ∞/∞. Při jejím použití však musíme být obezřetní. Vždy totiž musí být splněny uvedené předpoklady. Především obě funkce musí mít v zadaném bodě buď současně nulovou limitu, nebo limita absolutní hodnoty funkce ve jmenovateli musí být nekonečná. Jinak větu použít nelze!

Větu je možno stručně formulovat tak, že při splnění výše uvedených podmínek *je limita podílu rovna limitě podílu derivací*. Všimněte si, že ve vzorci se skutečně vyskytuje podíl derivací, nikoliv derivace podílu!

Poznámka
Často se stává, že po aplikaci L'Hospitalova pravidla dospějeme opět k neurčité limitě typu $0/0$ a ∞/∞. Při jejím výpočtu můžeme uvedeného pravidla použít znovu a tento postup opakovat tak dlouho, dokud nezískáme hledaný výsledek.

Poznámka
L'Hospitalovo pravidlo můžeme použít i při výpočtu jednostranných limit typu $0/0$ a ∞/∞.

Poznámka
Kromě uvedených typů neurčitých výrazů existuje celá řada dalších limit, k jejichž výpočtu nelze větu o algebře limit (viz kapitola 1.1) rovněž bezprostředně použít. V následujících příkladech si některé takové limity uvedeme a ukážeme si, jak je možno tyto limity počítat pomocí L'Hospitalova pravidla.

Příklad 1 ***Limity typu*** $0.\infty$

Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. Pak úprava $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{1/g(x)}$, popř. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{1/f(x)}$, převádí neurčitou limitu $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right] = 0.\infty$ na neurčitou limity typu $0/0$, popř. ∞/∞. K výpočtu obou nových limit již ale můžeme použít L'Hospitalovo pravidla.

Příklad 2 ***Limity typu*** 1^∞

Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. Pak úprava[1] $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\left[g(x).\ln f(x)\right]}$ převádí neurčitou limitu 1^∞ na neurčitou limitu $0.\infty$, kterou počítáme podle příkladu 1.

Příklad 3 ***Limity typu*** 0^0

Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Pak úprava[2] $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\left[g(x).\ln f(x)\right]}$ převádí neurčitou limitu 0^0 na neurčitou limitu $0.\infty$, kterou počítáme podle příkladu 1.

Příklad 4 ***Limity typu*** ∞^0

Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Pak úprava[3] $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\left[g(x).\ln f(x)\right]}$ převádí neurčitou limitu ∞^0 na neurčitou limitu $0.\infty$, kterou počítáme podle příkladu 1.

---

[1] Zde využíváme spojitosti funkce e^x.
[2] Zde využíváme spojitosti funkce e^x a faktu, že $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$.
[3] Zde využíváme spojitosti funkce e^x a faktu, že $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x = +\infty$.

Příklad 5 ***Limity typu*** $+\infty-\infty$
Limita typu $+\infty-\infty$ se dá obvykle zapsat ve tvaru

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}\right],$$

kde $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ tak, že $\lim_{x\to a}\left[1/f(x)\right] = \lim_{x\to a}\left[1/g(x)\right] = +\infty$. Pak ovšem úprava

$$\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)} = \frac{g(x)-f(x)}{f(x).g(x)}$$

převádí výpočet neurčité limity typu $+\infty-\infty$ na výpočet neurčité limity 0/0, na kterou můžeme aplikovat L'Hospitalovo pravidlo přímo.

1.7 Vektorové funkce

Definice
Pod reálnou ***vektorovou funkcí*** jedné reálné proměnné (stručně - vektorová funkce) rozumíme zobrazení $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$,[1] kde n je nějaké přirozené číslo, $n>1$.

Poznámka
Vektorová funkce $\mathbf{f}$ je zadaná uspořádanou n-ticí reálných funkcí $\left[f_1, f_2, ..., f_n\right]$. Těmto funkcím budeme říkat ve shodě s obvyklou terminologií ***složky vektorové funkce*** $\mathbf{f}$.

V přírodovědných a technických aplikacích volíme obvykle $n=2$ nebo $n=3$. V těchto případech je grafem zadané vektorové funkce křivka v rovině či v prostoru. Typickým představitelem vektorové funkce může být např. trajektorie hmotného bodu v rovině či prostoru.

Definice
Nechť je vektorová funkce $\mathbf{f}$ definována na okolí bodu $\xi_0\in\mathbb{R}$. Řekneme, že je ***spojitá*** v tomto bodě, právě když [2]

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0:\forall\xi\in \mathrm{D}_{\mathbf{f}} \text{ platí } \left|\xi-\xi_0\right|\le\delta\Rightarrow\left\|\mathbf{f}(\xi)-\mathbf{f}(\xi_0)\right\|<\varepsilon.$$

Věta
Vektorová funkce $\mathbf{f}$ je spojitá v bodě ξ_0, právě když jsou v tomto bodě spojité všechny její složky.

Definice
Řekneme, že vektorová funkce $\mathbf{f}$ má v bodě $\xi_0\in\mathbb{R}$, na jehož redukovaném okolí je definována[3], ***vlastní limitu*** $\mathbf{A}$, právě když

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0:\forall\xi\in \mathrm{D}_{\mathbf{f}} \text{ platí } 0<\left|\xi-\xi_0\right|<\delta\Rightarrow\left\|\mathbf{f}(\xi)-\mathbf{A}\right\|<\varepsilon.$$

---

[1] Vektorové veličiny značíme v tomto textu tučným tiskem.

[2] Symbolem $\|\mathbf{a}\|$ označujeme eukleidovskou normu vektoru $\mathbf{a}$, $\|\mathbf{a}\|\equiv\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^{\,2}}$. Viz též Apendix 4.

[3] V samotném bodě ξ_0 tedy být definována nemusí.

Poznámka
Obdobným způsobem můžeme definovat i limity jednostranné a vlastní limity v nevlastních bodech. Nevlastní limity nejsou ale pro vektorové funkce definovány.

Věta
Vektorová funkce $\mathbf{f} \equiv [f_1, f_2, ..., f_n]$ má v bodě ξ_0 limitu $\mathbf{A} \equiv [A_1, A_2, ..., A_n]$, právě když má v tomto bodě limitu každá její složka. Navíc platí

$$\lim_{\xi \to \xi_0} f_k(\xi) = A_k \quad \forall k = 1, ..., n.$$

Definice
Nechť je vektorová funkce $\mathbf{f}$ definována na okolí bodu $\xi_0 \in \mathbb{R}$. Pod ***první derivací*** funkce $\mathbf{f}$ v bodě ξ_0 rozumíme

$$\mathbf{f}'(\xi_0) \equiv \lim_{\xi \to \xi_0} \frac{\mathbf{f}(\xi) - \mathbf{f}(\xi_0)}{\xi - \xi_0}.$$

Poznámka

Pro derivaci vektorové funkce $\mathbf{f}$ v bodě ξ_0 budeme též používat označení $\frac{d\mathbf{f}}{d\xi}(\xi_0)$.

Věta
Vektorová funkce $\mathbf{f}$ má v bodě ξ_0 první derivaci, právě když mají v tomto bodě první derivaci všechny její složky. Navíc platí

$$\mathbf{f}'(\xi_0) = \left(f_1'(\xi_0), ..., f_n'(\xi_0) \right).$$

Poznámka
Vektorové funkce můžeme tedy derivovat po složkách. V konkrétních výpočtech můžeme proto využít všech poznatků, které jsme získali pro reálné funkce jedné reálné proměnné.

Věta *(algebra derivací pro vektorové funkce)*
Nechť $\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}$ jsou vektorové funkce definované na nějakém okolí bodu ξ_0. Mají-li smysl pravé strany, platí následující rovnosti [1]

$$(\mathbf{f} \pm \mathbf{g})'(\xi_0) = \mathbf{f}'(\xi_0) \pm \mathbf{g}'(\xi_0),$$

$$(\mathbf{f}.\mathbf{g})'(\xi_0) = \mathbf{f}'(\xi_0).\mathbf{g}(\xi_0) + \mathbf{f}(\xi_0).\mathbf{g}'(\xi_0).$$

Jsou-li navíc $\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}$ trojrozměrné vektorové funkce, $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, můžeme dále psát [2]

$$(\mathbf{f} \times \mathbf{g})'(\xi_0) = \mathbf{f}'(\xi_0) \times \mathbf{g}(\xi_0) + \mathbf{f}(\xi_0) \times \mathbf{g}'(\xi_0).$$

Poznámka
Obdobně jako v případě reálných funkcí můžeme i pro funkce vektorové zavést pojem ***vyšších derivací***. Ty opět můžeme počítat po složkách.

---

[1] Tečkou označujeme skalární součin, $\mathbf{f}.\mathbf{g} \equiv f_1 g_1 + f_2 g_2 + ... + f_n g_n$.

[2] Symbolem $\times$ označujeme vektorový součin, $\mathbf{f} \times \mathbf{g} \equiv [f_2 g_3 - f_3 g_2, f_3 g_1 - f_1 g_3, f_1 g_2 - f_2 g_1]$

1.8 Komplexní funkce

Definice
Pod ***komplexní funkcí*** jedné reálné proměnné rozumíme zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Poznámka
Komplexní funkce f je jednoznačně definována svou reálnou a imaginární částí, $f \equiv f_1 + if_2$. Na komplexní funkci je možno též pohlížet jako na vektorovou funkci $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f} \equiv [f_1, f_2]$.

Poznámka
Spojitost, limitu[1] (ve vlastním i nevlastním bodě, oboustrannou i jednostrannou) i derivaci komplexní funkce jedné reálné proměnné definujeme bezezbytku stejně jako v případě funkcí reálných[2]. Pouze tam, kde se vyskytnou komplexní čísla a komplexní funkční hodnoty, musíme použít naznačených operací (sčítání, odečítání, násobení, dělení či absolutní hodnoty) tak, jak jsou definovány na množině všech komplexních čísel.

Věta
Komplexní funkce f je spojitá v bodě a, právě když je v tomto bodě spojitá její reálná i imaginární část.

Věta
Komplexní funkce $f \equiv f_1 + if_2$ má v bodě a limitu $A \equiv A_1 + iA_2$, právě když platí

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = A_1 \quad \wedge \quad \lim_{x \to a} f_2(x) = A_2 .$$

Věta
Komplexní funkce $f \equiv f_1 + if_2$ má v bodě a první derivaci, právě když má v tomto bodě první derivaci její reálná i imaginární část. Navíc platí

$$f'(a) = f_1'(a) + if_2'(a) .$$

Poznámka
Derivace komplexní funkce jedné reálné proměnné je tedy jednoznačně dána derivacemi její reálné a imaginární části. V konkrétních výpočtech můžeme proto bezezbytku využít všech poznatků, které jsme získali pro reálné funkce jedné reálné proměnné.

Poznámka
Obdobně jako v případě reálných funkcí můžeme i pro funkce komplexní zavést pojem ***vyšších derivací***. Jistě nepřekvapí, že platí

$$f^{(n)}(a) = f_1^{(n)}(a) + if_2^{(n)}(a) .$$

[1] Jen vlastní! Nevlastní limity nejsou pro komplexní funkce definovány.
[2] Pokuste se sestavit všechny nezbytné definice sami.