Vizualizace řešení obyčejných diferenciálních rovnic a jejich soustav

Úkol

Studujte závislost řešení zadaných obyčejných diferenciálních rovnic a jejich soustav na počátečních podmínkách.

Použitý software

Maple

Zadané rovnice

1. Rovnice vyjadřující zákon radioaktivní přeměny

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda N(t), \tag{1}$$

kde N je počet dosud nepřeměněných jader, λ je konstanta radioaktivní přeměny[1] a t čas.

2. Pohybová rovnice pro lineární harmonický oscilátor

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x(t) = 0, \tag{2}$$

kde x je výchylka z rovnovážné polohy, ω je úhlová frekvence oscilátoru a t čas.

3. Pohybové rovnice soustavy dvou matematických kyvadel o stejné hmotnosti m a stejné délce závěsu, která konají malé kmity ve směru osy x a jsou spojená pružinou o tuhosti k_p

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2 x_1(t)}{\mathrm{d}t^2} &= -(k + k_p)x_1(t) + k_p x_2(t), \\ m\frac{\mathrm{d}^2 x_2(t)}{\mathrm{d}t^2} &= k_p x_1(t) - (k + k_p)x_2(t), \end{aligned} \tag{3}$$

kde k je kladná konstanta, jejíž hodnotu můžeme určit pomocí známé délky závěsu a hmotnosti studovaných kyvadel, a symboly x_1 a x_2 označují výchylky prvního a druhého kyvadla z rovnovážných poloh.

Teorie

Obyčejná diferenciální rovnice[2] je vztah (platný v určitém oboru) mezi neznámou funkcí jedné proměnné a jejími derivacemi

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)\right) = 0, \tag{4}$$

kde n je tzv. ***řád diferenciální rovnice***. Pro (n+1)-tici a, b_1, b_2, …, b_n existuje za jistých podmínek právě jedno řešení $y = f(x)$ rovnice, které splňuje tzv. ***počáteční podmínky***

$$y(a) = b_1, y'(a) = b_2, y''(a) = b_3, ..., y^{(n-1)}(a) = b_\mathrm{n}\ . \tag{5}$$

---

[1] Názornější veličinou, která se používá jako charakteristika radionuklidu místo přeměnové konstanty λ, je poločas přeměny T, který je s ní spojena vztahem $T\lambda$ = ln2 a udává dobu, za níž se přemění polovina z počátečního počtu $N(0)$ dosud nepřeměněných jader.

[2] Přesné formulace této problematiky čtenář nalezne např. v knize REKTORYS, K. *Přehled užité matematiky*. Praha: SNTL, 1968.

Taková řešení budeme nazývat ***partikulárními řešeními***. ***Obecným řešením*** obyčejné diferenciální rovnice (v jistém oboru) budeme nazývat funkci $g(x,C_1, C_2, \ldots, C_n)$ proměnné x a konstant $C_1, C_2, \ldots, C_n$ takovou, že pro každou $(n+1)$-tici $a, b_1, b_2, \ldots, b_n$ lze přiřadit těmto konstantám jednoznačně takové číselné hodnoty, že vzniklá funkce $y(x) = g(x,C_1, C_2, \ldots, C_n)$ je řešením dané diferenciální rovnice s počátečními podmínkami (4).

V našem případě je první zadanou rovnicí (1) tzv. ***separovatelná rovnice*** 1. řádu, která se řeší separací nezávisle a závislé proměnné a jejich následnou integrací. Druhá rovnice (2) je potom tzv. ***homogenní lineární diferenciální rovnicí*** 2. řádu s konstantními koeficienty, řešená obvykle pomocí předpokládaného řešení ve tvaru exponenciální funkce a tzv. charakteristické rovnice. Obecný tvar těchto rovnic a jejich řešení naleznete v kap. 7 skripta R. Kaluse a D. Hrivňáka *Breviář vyšší matematiky*.

Řešení soustavy ***obyčejných diferenciálních rovnic***

$$F_i\left(x, y_1(x), y_1'(x), y_1''(x), \ldots, y_1^{(n_1)}(x), \ldots, y_k(x), y_k'(x), y_k''(x), \ldots, y_k^{(n_k)}(x)\right) = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,k \tag{6}$$

která je v našem případě (3) ***lineární homogenní soustavou*** dvou diferenciálních rovnic, bude přece jen obtížnější než v případě rovnic (1) a (2). Můžete jej opět nalézt v literatuře[2], pro účely této úlohy jej ovšem není nutné znát, protože k řešení využijeme matematický software.

Postup práce

<u>I. zákon radioaktivní přeměny</u>

1. Nachystejte si vyřešenou rovnici (1) z domácí přípravy.
2. Ověřte řešení rovnice (1) pomocí software Maple – spusťte Maple, zapište
   ```
   restart; dsolve(diff(N(t),t)=-λ*N(t))
   ```
   a potvrďte klávesou `Enter`.
3. Získejte partikulární řešení rovnice pro zvolenou počáteční podmínku, nejlépe obecnou, např. $N(0) = a$
   ```
   restart;dsolve({diff(N(t),t)=-λ*N(t),N(0)=n}
   ```
4. Studujte závislost řešení na počáteční podmínce – do jednoho grafu vykreslete několik partikulárních řešení rovnice (1) pro pevně zvolenou konstantu λ. Např. pro $\lambda = 0{,}5$
   ```
   restart;lambda:=0.5;plot({0.25*exp(-λ*t),0.5*exp(-λ*t),exp(-λ*t),
   2*exp(-λ*t)},t=0..10)
   ```
5. Získaný graf si uložte – pravým tlačítkem klikněte na graf a zvolte `Export`.
6. Zopakujte pro jinou hodnotu konstanty λ a graf si také uložte.
7. Studujte závislost řešení na přeměnové konstantě λ – do jednoho grafu vykreslete několik partikulárních řešení rovnice (1) pro pevně zvolenou počáteční podmínku $N(0)$.
   ```
   restart;n:=2;plot({n*exp(-0.25*t),n*exp(-0.5*t),n*exp(-t),n*exp(-
   2*t)}, t=0..10)
   ```
8. Získaný graf si uložte a proveďte znovu pro jinou počáteční podmínku.
9. V závěru zhodnoťte vliv přeměnové konstanty a počáteční podmínky (co vyjadřuje?) na průběh radioaktivní přeměny.

<u>II. Jednorozměrný lineární harmonický oscilátor</u>

10. Nachystejte si vyřešenou rovnici (2) z domácí přípravy a ověřte Vaše řešení pomocí software Maple
    ```
    restart;dsolve(diff(x(t),t,t)+ω^2*x(t)=0)
    ```
11. Získejte partikulární řešení rovnice pro zvolené počáteční podmínky, nejlépe obecné, např. $x(0) = a$, $x'(0) = b$
    ```
    restart;dsolve({diff(x(t),t,t)+ω^2*x(t)=0,x(0)=a,D(x)(0)=b})
    ```
12. Studujte závislost řešení na počátečních podmínkám. Nejprve na podmínce $x(0) = a$, úhlovou frekvenci ω považujte za pevnou a hodnotu $x'(0)$ také – zatím ji nastavte na nulu

```
restart;ω:=1;plot({0.5*cos(ω*t),cos(ω*t),2*cos(ω*t),3*cos(ω*t)},t=0
..10)
```

13. Získaný graf si uložte a věnujte se druhé počáteční podmínce. Vykreslete si grafy řešení pro různá $x'(0) = b$, přitom mějte pevnou úhlovou frekvenci ω a hodnotu $x(0)$ nulovou.

```
restart;ω:=1;plot({0.5*sin(ω*t)/ω,sin(ω*t)/ω, 2*sin(ω*t)/ω,
3*sin(ω*t)/ω},t=0..10)
```

14. Nyní zkuste měnit jednu počáteční podmínku při nenulové druhé, např.

```
restart;ω:= 1;b:=1;plot({b*sin(ω*t)/ω+0.5*cos(ω*t),b*sin(ω*t)/ω+
cos(ω*t),b*sin(ω*t)/ω+2*cos(ω*t),b*sin(ω*t)/ω+3*cos(ω*t)},t=0..10)
```

15. Nakonec ověřte závislost řešení na frekvenci

```
restart;a:=1;b:=1;plot({b*sin(0.5*t)/0.5+a*cos(0.5*t),b*sin(t)+a*cos(
t),b*sin(2*t)/2+a*cos(2*t),b*sin(3*t)/3+a*cos(3*t)},t=0..10)
```

16. V závěru zhodnoťte, co vyjadřují počáteční podmínky. Pro konkrétní počáteční podmínky řešení rovnic fyzikálně interpretujte.

III. Soustava dvou matematických kyvadel

17. Pomocí software Maple získejte obecné řešení soustavy diferenciálních rovnic (3) popisující soustavu dvou matematických kyvadel

```
restart;dsolve({m*(diff(x1(t),t,t))=-(k+p)*x1(t)+p*x2(t),
m*(diff(x2(t),t,t))=p*x1(t)-(k+p)*x2(t)})
```

18. Vypočtěte partikulární řešení soustavy rovnic pro speciální počáteční podmínky $x_1(0) = 1$, $x_1'(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $x_2'(0) = 0$

```
restart;dsolve({m*(diff(x1(t),t,t))=-(k+p)*x1(t)+p*x2(t),
m*(diff(x2(t),t,t))=p*x1(t)-(k+p)*x2(t),x1(0)=1,x2(0)=0,
D(x1)(0)=0,D(x2)(0)=0})
```

19. Získané partikulární řešení si vykreslete

```
restart;k:=10;p:=1;m:=1;a:=1;b:=0;c:=0;d:=0;
plot({cos(sqrt(k)*t/sqrt(m))/2+cos(sqrt(k+2*p)*t/sqrt(m))/2,
-cos(sqrt(k+2*p)*t/sqrt(m))/2+cos(sqrt(k)*t/sqrt(m))/2},t=0..30)
```

Graf průběhu si uložte. V závěru zapište, co vyjadřují počáteční podmínky. Také fyzikálně interpretujte probíhající děj (co se s kyvadly v průběhu času děje).

Doporučená literatura

KALUS, R., HRIVŇÁK D. *Breviář vyšší matematiky*. Ostrava: Ostravská univerzita, 2001.

FULFORD, G., FORRESTER, P., JONES, A. *Modelling with Differential and Difference Equations.* Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

manuály k software Maple