Lekce 3
Základy teorie pravděpodobnosti

Osnova

1. Statistický experiment
2. Pravděpodobnost
3. Rozdělení pravděpodobnosti
4. Náhodné proměnné
5. Spojitá rozdělení pravděpodobnosti
6. Vícerozměrná rozdělení pravděpodobnosti

Statistický experiment

Experiment, jehož výsledek není určen jednoznačně a je náhodně vybírán z množiny $\{V_1, \ldots, V_N\}$.

Pokus – jedno konkrétní provedení statistického experimentu. V pokusu se realizuje jeden konkrétní výsledek $V^{(K)} \in \{V_1, \ldots, V_N\}$.

Realizace statistického experimentu - následná řada N pokusů reprezentovaná uspořádanou N-ticí výsledků $[V^{(1)}, \ldots, V^{(N)}]$.

Příklad

statistický experiment	- házení kostkou
výsledky	- $V_1 = \bullet, \ldots, V_6 = \colon\colon\colon$
pokus	- jeden hod
realizace	- řada po sobě jdoucích hodů

Pravděpodobnost

Relativní četnost

Nechť $S_N \equiv [V^{(1)},\ldots,V^{(N)}]$ je realizace statistického experimentu, pak relativní četností výsledku V_k v této realizaci nazveme

$$\Pi_k(S_N) \equiv \frac{N_k}{N},$$

kde N_k je počet opakování výsledku V_K v S_N.

Statistický regulární experiment

$$\forall k = 1,\ldots,N \;\; \exists P_k \in \langle 0,1 \rangle : \quad \forall \{S_N\}_{N=N_0}^{+\infty} \;\; P_k = \lim_{N\to+\infty} \Pi_k(S_N) = \lim_{N\to+\infty} \frac{N_k}{N}$$

Pravděpodobnost výsledku V_k

$$P_k = \lim_{N\to\infty} \frac{N_k}{N}$$

Pravděpodobnost

Vlastnosti pravděpodobnosti

- $0 \le P_k \le 1 \quad \forall k = 1, \ldots, n$
- $\sum_{k=1}^{n} P_k = 1$

Klasifikace výsledků

- **jistý** - nastane vždy
- **nemožný** - nenastane nikdy
- **téměř jistý** - $P_k = 1$ (nemusí ale nastat vždy!)
- **téměř nemožný** - $P_k = 0$ (může nastat!)

Rozdělení pravděpodobnosti

Normované rozdělení pravděpodobnosti

$$P : \{V_1, \ldots, V_n\} \to \langle 0,1 \rangle; \quad \sum_{k=1}^{n} P_k = 1$$

Nenormované rozdělení pravděpodobnosti

$$P' : \{V_1, \ldots, V_n\} \to \langle 0,\alpha \rangle; \quad \sum_{k=1}^{n} P'_k \neq 1$$

Přechod k normovanému rozdělení

$$P_k = P'_k / \sum_{k=1}^{n} P'_k$$

Náhodné proměnné

Náhodná proměnná

$$x:\{V_1,\ldots,V_n\}\to\mathbb{R}(\mathbb{C})$$

Proměnná *x* nabývá náhodných hodnot podle výsledku realizovaného v konkrétním pokusu.

Pozor!
Zobrazení nemusí být prosté, tj. hodnota náhodné proměnné nemusí „ostře" rozlišovat jednotlivé výsledky.

Obvykle k rozlišení výsledků $V_1,\ldots,V_n$ potřebujeme náhodných proměnných několik:

$$[x_1,\ldots,x_\alpha]:[V_1,\ldots,V_n]\to\mathbb{R}^\alpha(\mathbb{C}^\alpha),$$

kde vektorové zobrazení [...] je již prosté, nebo-li:

$$V_k\equiv[x_{1k},\ldots,x_{\alpha k}].$$

Náhodné proměnné

<u>Střední hodnota</u>
pro konkrétní realizaci statistického experimentu $S_N \equiv \left[V^{(1)},\dots,V^{(N)}\right] \to \left[x^{(1)},\dots,x^{(N)}\right]$

$$\langle x \rangle_{S_N} = \frac{1}{N}\sum_{K=1}^{N} x^{(K)}.$$

Alternativní výpočet

$$\langle x \rangle_{S_N} = \sum_{k=1}^{n} \Pi_k(S_N) x_k$$

<u>Střední hodnota</u>
pro statisticky regulární experiment

$$\langle x \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{K=1}^{N} x^{(K)}$$

Alternativní výpočet

$$\langle x \rangle = \sum_{k=1}^{n} P_k x_k$$

Náhodné proměnné

Střední kvadratická fluktuace

pro konkrétní realizaci statistického experimentu

$$\sigma^2(x, S_N) = \frac{1}{N}\sum_{K=1}^{N}(x^{(K)} - \langle x \rangle_{S_N})^2$$

Alternativní výpočet

$$\sigma^2(x, S_N) = \sum_{k=1}^{n} \Pi_k(S_N)(x_k - \langle x \rangle_{S_N})^2$$

Střední kvadratická fluktuace

pro statisticky regulární experiment

$$\sigma^2(x) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{K=1}^{N}(x^{(K)} - \langle x \rangle_{S_N})^2$$

Alternativní výpočet

$$\sigma^2(x) = \sum_{k=1}^{n} P_k(x_k - \langle x \rangle)^2 = \sum_{k=1}^{n} P_k x_k^{\;2} - 2\langle x \rangle \sum_{k=1}^{n} P_k x_k + \langle x \rangle^2 \sum_{k=1}^{n} P_k = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

Spojité rozdělení pravděpodobnosti

Počet možných výsledků je nespočetný, obvykle je číslujeme spojitým indexem $v \in \langle a,b \rangle$.

<u>Relativní četnost pro</u> $\langle v, v+\Delta v \rangle \in \langle a,b \rangle$

$$\Delta\Pi(S_N; v, \Delta v) = \frac{\Delta N(v,\Delta v)}{N}$$

<u>Pravděpodobnost pro</u> $\langle v, v+\Delta v \rangle \in \langle a,b \rangle$

$$\Delta P(v,\Delta v) = \lim_{N\to\infty} \Delta\Pi(S_N; v, \Delta v) \equiv \lim_{N\to\infty} \frac{\Delta N(v,\Delta v)}{N}$$

<u>Hustota pravděpodobnosti</u>

$$P(v) = \lim_{\Delta v\to 0} \frac{\Delta P(v,\Delta v)}{\Delta v}$$

Vlastnosti hustoty pravděpodobnosti

- $0 \le P(v) \le 1 \quad \forall v \in \langle a,b \rangle$
- $\int_a^b P(v)\,\mathrm{d}v = 1$

Spojité rozdělení pravděpodobnosti

Náhodná proměnná

$$x : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}(\mathbb{C}) \quad \Rightarrow \quad x = x(v)$$

Střední hodnota

$$\langle x \rangle = \int_a^b x(v) P(v)\, \mathrm{d}v$$

Střední kvadratická fluktuace

$$\sigma^2(x) = \int_a^b \left[x(v) - \langle x \rangle \right]^2 P(v)\, \mathrm{d}v = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2$$

Vícerozměrná rozdělení pravděpodobnosti

Nespočetný počet možných výsledků, tentokrát indexovaných vektorovým indexem

$$\vec{v} \equiv [v_1, \ldots, v_R], \qquad \vec{v} \in V \equiv \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \ldots \times \langle a_R, b_R \rangle \subset \mathbb{R}^R$$

Hustota pravděpodobnosti

$$P : V \to \langle 0,1 \rangle$$

Normovací podmínka

$$\int_V P(\vec{v}) \, \mathrm{d}^R \vec{v} = 1$$

Interpretace

$$\int_{W \subset V} P(\vec{v}) \, \mathrm{d}^R \vec{v}$$

… je pravděpodobnost, že výsledek pokusu bude patřit do W.

Vícerozměrná rozdělení pravděpodobnosti

Náhodná proměnná

$$x : V \to \mathbb{R}(\mathbb{C}) \quad \Rightarrow \quad x = x(\vec{v}) = x(v_1, \ldots, v_R)$$

Střední hodnota

$$\langle x \rangle = \int_V x(\vec{v})\, P(\vec{v})\, \mathrm{d}^R \vec{v}$$

Střední hodnota fluktuace

$$\sigma^2(x) = \int_V \left[x(\vec{v}) - \langle x \rangle \right]^2 \mathrm{d}^R \vec{v} = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2$$

Doporučená literatura

D. HRIVŇÁK, I. JANEČEK, R. KALUS
Kvantová, atomová a jaderná fyzika, dodatek 6.3 (http://artemis.osu.cz/mmfyz/index.htm)
Ostravská univerzita, Ostrava 2004

D. P. LANDAU, K. BINDER
A Guide to MC Simulations in Statistical Physics, kap. 2.2
Cambridge University Press, Cambridge 2000