

Kapitola 1

Záření dokonale černého tělesa a další obláčky na nebi klasické fyziky, kvantový harmonický oscilátor.

Obsah:

- 1.1 Záření černého tělesa a Planckova hypotéza
- 1.2 Měrná tepla pevných látek
- 1.3 Einsteinova teorie fotoelektrického jevu
- 1.4 Kvantový a klasický oscilátor

Literatura:

- [1] BEISER A. „Úvod do moderní fyziky“
- [2] HAJKO V. a kol. „Fyzika v experimentoch“
- [3] HORÁK Z., KRUPKA F. „Fyzika“

Během univerzitních studií Maxe Plancka, budoucího nositele Nobelovy ceny, se dostalo tomuto výjimečnému fyzikovi svérázného varování. Radili mu, aby studoval něco jiného než fyziku a neutrácel svůj nesporný talent v oboru, který je již uzavřen, v němž není možno očekávat žádné velké a převratné objevy. Ano, tento názor odrážel v té době vcelku všeobecně zastávané mínění, že fyzika je ukončenou stavbou, na níž zbývá provést jen některé méně důležité úpravy. Vždyť ji tvořili takoví giganti jako analytická mechanika, Maxwellova teorie elektromagnetismu, termodynamika a Boltzmannova kinetická teorie. Pravda, existovalo několik problémů, které se zatím nepodařilo vysvětlit. Nicméně podle mínění učenců jejich konečné řešení bylo pouze otázkou času. A tak téměř nikdo netušil, že záhady kolem spekter atomů, záření dokonale černého tělesa, „nehodné“ chování tepelných kapacit pevných látek při nízkých teplotách či radioaktivita zanedlouho téměř rozmetají onu již podle mnohých završenou stavbu klasické fyziky. A profesor Jolly (Planckův učitel fyziky na univerzitě v Mnichově; patřil ke generaci těch, kteří věřili, že ve fyzice již není možno nic zásadního objevit) zatím netuší, že jeho mladý žák se bude na destrukci (či lépe řečeno přestavbě) chrámu klasické fyziky nezanedbatelnou měrou podílet.

V následujících paragrafech se budeme věnovat některým klasicky neřešitelným problémům, jejichž pochopení přesahovalo meze fyziky devatenáctého století a mělo společný základ. Tím je předpoklad, že harmonický oscilátor (např. matematické kyvadlo) nemůže nabývat všech energií mezi nulou a (teoreticky) nekonečnem, ale pouze některých z nich. Tyto vybrané energie tvoří spočetnou množinu. Je jich tedy nekonečně méně, než kolik připouští klasická mechanika. Povšimněte si také, jak velmi jednoduchý matematický model umožnil popsat poměrně širokou škálu na první pohled různorodých jevů. Více než jinde zde vyniká něco, co jsme si zvykli nazývat fyzikální jednotou světa - možnost popsat svět s pomocí několika málo nezávislých postulátů.

1.1 Záření dokonale černého tělesa a Planckova kvantová hypotéza

[1] str. 386-396

[2] str. 55-61

[3] str. 834-844

Dokonale černé těleso

O záření dokonale černého tělesa jste již slyšeli v přednášce z optiky. Víte, že se jedná o tepelné elektromagnetické záření, které je neustále absorbováno a zpětně emitováno látkou (například stěnami dutiny), a je tudíž s touto látkou v termodynamické rovnováze. Víte, v jakých mikroskopických mechanismech je třeba hledat jeho původ, i to, že se jedná o záření nemonochromatické, v němž jsou zastoupeny všechny možné vlnové délky elektromagnetického spektra (ovšem s různou relativní intenzitou). Víte také, jakým způsobem se dokonale černé těleso realizuje v laboratoři (dutinový zářič), a rovněž i to, že mnohé tepelné zářiče je možno v dostatečně přesném přiblížení považovat za dokonale černé (hvězdy, Slunce).

Protože je elektromagnetické pole reprezentující „dokonale černé“ záření v neustálém kontaktu (a tedy i v rovnováze) s látkou, můžeme mu přisoudit teplotu. A to teplotu stejnou, jakou má tato látka. Z Maxwellovy teorie víme, že elektromagnetické pole nese energii, jejíž objemovou hustotu můžeme vyjádřit přímo z Maxwellových rovnic prostřednictvím elektrické a magnetické intenzity. V minulém století fyziky navíc zajímalo, jak mnoho této energie je obsaženo v jednotlivých monochromatických složkách studovaného pole - to jest její spektrální rozklad. Zavedli tedy spektrální objemovou hustotu energie záření $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega, T)$ tak, aby výraz

$$\int_V d^3\mathbf{r} \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \varepsilon(\mathbf{r}, \omega, T)$$

udával energii záření obsaženého v objemu V při teplotě T , jehož úhlové frekvence jsou z intervalu zadaného mezemi druhého integrálu. Pochopitelně v termodynamické rovnováze předpokládáme homogenní rozložení energie v prostoru¹, proto závislost hustoty energie ε na poloze \mathbf{r} neuvažujeme. Spektrální hustotu energie dutinového záření uměli fyzikové měřit s dostatečnou přesností, rovněž pro teoretické odvození její závislosti na frekvenci měli mocné prostředky (Maxwellovu teorii elektromagnetismu a termodynamiku).

Na základě 1. a 2. věty termodynamické se podařilo ukázat², že musí platit

$$\varepsilon(\omega, T) = \omega^3 f(\omega/T), \quad (1-1)$$

kde f je zatím neznámá funkce, ovšem již jen jedné reálné proměnné. Více však termodynamika říci nedokázala³. Neznámou funkci ve vztahu (1-1) se podařilo nalézt až s pomocí Maxwellovy teorie a statistické mechaniky.

¹ Zde (a rovněž i dále) uvažujeme vždy měřenou (makroskopickou) energii, kterou dostaneme časovým a prostorovým středováním okamžité hodnoty plynoucí z Maxwellových rovnic. O tom, proč je nutno toto středování provést, jste již slyšeli v přednášce z optiky.

² lord Rayleigh, 1900

³ Teprve v roce 1966 dokázal ter Haar, že uvedený výsledek obsahuje maximální možnou informaci, kterou můžeme získat z čistě termodynamických úvah.

Rayleigh - Jeansův zákon

První teoretická formule vedoucí ke konkrétnímu vyjádření zatím neznámé funkce f ve vztahu (1-1) pochází od anglického fyzika lorda Rayleigha, který si povšiml, že volné elektromagnetické pole v dutině je možno popsat jako nekonečný soubor lineárních harmonických oscilátorů. Tedy, budeme-li znát počet těchto oscilátorů kmitajících s frekvencemi z intervalu $(\omega, \omega+d\omega)$, označme jej $dN(\omega, d\omega)$, a střední tepelnou energii každého z těchto oscilátorů odpovídající teplotě T , tu označme $e(T)$, budeme moci okamžitě určit i hledanou závislost $\varepsilon(\omega, T)$. Platí totiž zřejmě

$$\varepsilon(\omega, T) = \frac{e(T) dN(\omega, d\omega)}{V d\omega}, \quad (1-2)$$

kde V je objem oblasti - dutiny, v níž se studované záření nachází. Ponechejme v tuto chvíli stranou problém rozkladu elektromagnetického pole na nezávislé harmonické oscilátory i způsob určení jejich počtu (obojí naleznete v dodatcích I a II k této kapitole) a věnujme se problému určení střední tepelné energie lineárního harmonického oscilátoru odpovídající teplotě T . Statistická mechanika nám napoví, že platí ⁴

$$e(T) = \frac{\int_0^{+\infty} E \exp(-E/kT) dE}{\int_0^{+\infty} \exp(-E/kT) dE}, \quad (1-3)$$

kde k je tzv. Boltzmannova konstanta⁵ ($k = R/N_A =$ plynová konstanta dělená Avogadrovým číslem). Integrály ve vztahu (1-3) snadno vyčíslíme a dostaneme jednoduchý výsledek

$$e(T) = k T. \quad (1-4)$$

Ten ale znáte z molekulové fyziky jako speciální formulaci tzv. ekvipartičního teorému. S využitím výsledků z dodatku II (zejména pak vzorce 1.II-2) pak již snadno získáme konečný vztah

$$\varepsilon(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} k T, \quad (1-5)$$

který je všeobecně známý jako **Rayleigh - Jeansův zákon**.

Vztah (1-5) určuje tedy, jakým způsobem bude v rámci klasické fyziky záviset spektrální hustota energie záření dokonale černého tělesa na (úhlové) frekvenci. Povšimněte si především, že tento vztah je v naprostém souladu s očekáváním plynoucím z termodynamiky - viz (1-1)⁶. Zdá se tedy, že klasická fyzika problém záření dokonale

⁴ S následující vzorcem jste se pravděpodobně zatím nesetkali. Nyní si ovšem k němu nic více říci nemůžeme. Berte jej proto jako daný fakt s tím, že si jej odvodíte v kursu statistické fyziky.

⁵ V době, k níž se váže náš výklad, nebyla Boltzmannova konstanta ještě zavedena. V našem textu se však nemusíme striktně držet historického pohledu, proto kvůli přehlednosti zapisujeme všechny vztahy v „moderní“ formě, která se ustálila až během 20. století.

⁶ Odvoďte tvar funkce $f(x)$ z (1-1) v tomto konkrétním případě.

černého tělesa úspěšně vyřešila. Ale není tomu tak. Na první pohled je to patrné z obrázku 1-A, na němž je zachycena závislost spektrální hustoty energie záření na úhlové frekvenci (při konstantní teplotě) podle vztahu (1-5) a současně i odpovídající závislost plynoucí z experimentu. Obě křivky sice splývají v oblasti malých frekvencí (v dlouhovlnné oblasti spektra), nicméně v oblasti kratších vlnových délek jsou zřetelné nezanedbatelné odchylky. Navíc veličina

$$E(T) = \int_0^{+\infty} \varepsilon(\omega, T) d\omega, \quad (1-6)$$

která by měla být objemovou hustotou energie záření (tj. energií záření v jednotce objemu bez ohledu na jeho frekvenci), je podle (1-5) nekonečná, neboť po dosazení (1-5) do (1-6) příslušný integrál na pravé straně (1-6) diverguje. O smysluplnosti podobného výsledku však můžeme pouze pochybovat.

V rámci klasické fyziky je tento nesouhlas teorie a experimentu neřešitelný a vžilo se pro něj označení **ultrafialová katastrofa**.

Planckova kvantová hypotéza ⁷

Rayleighova teorie nebyla jedinou, která se pokoušela kvantitativně postihnout chování frekvenční závislosti spektrální hustoty energie „dokonale černého“ záření. Za povšimnutí stojí především dva empirické zákony: **Wienův**

$$\varepsilon(\omega, T) = a\omega^3 \exp\left(-b\frac{\omega}{T}\right) \quad (1-7)$$

a **Planckův**

$$\varepsilon(\omega, T) = a\omega^3 \frac{1}{\exp\left(b\frac{\omega}{T}\right) - 1}, \quad (1-8)$$

kde a , b jsou konstanty, které je nutno získat fitováním na experimentální data. První z nich, Wienův zákon, popisoval velmi dobře chování spektrální hustoty energie v oblasti krátkých vlnových délek, v dlouhovlnné oblasti však selhával. Druhý zákon (zatím pouze empirický) však naopak vystihoval velmi věrně experimentální data v celém tehdy proměřeném frekvenčním a teplotním rozsahu⁸. Povšimněte si, že obě formule souhlasí s obecným požadavkem (1-1)⁹. Navíc je ze vztahů (1-5), (1-7) a (1-8) zřejmé, že Wienův zákon je limitním přiblížením zákona Planckova v oblasti vysokých frekvencí a zákon Rayleighův v oblasti frekvencí malých. Planckovi se tedy podařilo překlenout „zemi nikoho“ rozprostírající se mezi vzájemně se doplňujícími formulemi platnými v obou asymptotických oblastech elektromagnetického spektra.

⁷ Planck, 1900

⁸ Obě závislosti jsou pro ilustraci rovněž zahrnuty do obrázku 1-A. Pro přehlednost pouze pro jednu vybranou teplotu. Máte-li přístup k počítači a vhodnému software, otestujte si všechny tři zákony v co nejširší oblasti teplot.

⁹ Nalezněte konkrétní tvary funkce f pro Wienovu a Planckovu formuli.

Souhlas empirické formule (1-8) s experimentem přiměl Plancka k usilovné práci na jejím teoretické zdůvodnění. Po půlroční úmorné práci Planck usoudil, že chyby klasické Rayleighovy teorie není možno hledat ani v elektromagnetické teorii ani v obecných závěrech statistické mechaniky, ale na jiném, zcela neočekávaném místě. Řešením problémů kolem záření dokonale černého tělesa (a rovněž i řady dalších nevyjasněných otázek) se stala tzv. Planckova kvantová hypotéza postulující, že

lineární harmonický oscilátor může nabývat pouze některých klasicky přípustných energií - těch, které splňují formuli

$$E_n = n \hbar \omega . \quad (1-9)$$

Konstantu \hbar dnes nazýváme „škrtnutou“ Planckovou konstantou a spolu s ní používáme i (normální, neškrtnutou) Planckovu konstantu $h = 2 \pi \hbar$, s jejíž pomocí můžeme vztah (1-9) přepsat na

$$E_n = n h \nu ,$$

kde ν je frekvence studovaného oscilátoru.

Na základě předpokladu (1-9) je pak zapotřebí přepsat výraz pro výpočet střední energie lineárního harmonického oscilátoru (1-3) na tvar

$$e(T) = \frac{\sum_0^{+\infty} E_n \exp(-E_n / kT)}{\sum_0^{+\infty} \exp(-E_n / kT)} . \quad (1-10)$$

Spojením vztahů (1-9) a (1-10) pak již snadno obdržíme¹⁰

$$e(T) = \frac{\hbar \omega}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1} . \quad (1-11)$$

Dosažením tohoto výrazu do vzorce (1-2) při současném použití vztahu (1.II-2) z dodatku II pak získáme výsledek, který je totožný s empirickou formulí (1-8)

$$\varepsilon(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1} . \quad (1-12)$$

Přesto, že je kvantová hypotéza v rámci klasické fyziky velmi cizorodým prvkem, ukázalo se později, že se může stát východiskem úspěšného řešení i dalších problémů, s

¹⁰ viz příklady k této kapitole

nimiž si „klasičtí“ fyzikové nevěděli rady. Musela být tedy brána vážně, ač mnozí se s ní nesmířili po celý svůj život. Její aplikaci na další klasicky neřešitelný problém si ukážeme v následujícím paragrafu, kde se budeme věnovat teplotní závislosti měrných tepel pevných látek. Dříve ale ještě jednu poznámku k „dokonale černému“ záření.

Planckova kvantová hypotéza ve spojení s metodou rozkladu elektromagnetického pole na soustavu nezávislých oscilátorů vede rovněž k závěru, že se energie elektromagnetického pole nesená monochromatickými vlnami o úhlové frekvenci ω může měnit pouze skokem o jakousi minimální „porci“ (kvantum) rovnu součinu $\hbar\omega$. Speciálně tedy stěny dutiny, a obecně jakákoliv látka, může vyzařovat elektromagnetickou energii pouze po těchto kvantech. V posledním paragrafu této kapitoly si ukážeme, jak je možno tuto představu dále rozvinout a s úspěchem použít při jednoduchém řešení záhady fotoelektrického jevu. Nenásilně tak dospějeme k vlnově-částicové (korpuskulární) dualitě elektromagnetického záření. Smíříme tak dva velké rivaly v nazírání na podstatu světla - Hyugense a Newtona¹¹.

Na závěr povídání o dokonale černém tělese se vraťme ještě k Planckově konstantě. Vidíme, že má rozměr účinku (J.s), a proto se o ní někdy také hovoří jako o elementárním kvantu účinku. Její hodnota nevyplývá z Planckovy teorie. Musí být určena ze srovnání teoretických výsledků s experimentálními daty. Již nyní se nabízí jedna možnost - porovnání formule (1-12) a jejich důsledků s měřeními charakteristik tepelného záření. Některé konkrétní propočty jsou součástí příkladů k této kapitole. V následujících paragrafech a kapitolách se bude Planckova konstanta objevovat v nejrůznějších vztazích (svou fyzikální podstatou velmi odlišných), z nichž s pomocí patřičných experimentálních dat budeme opět moci získat její konkrétní numerickou hodnotu. Pochopitelně všechna takto nezávisle získaná čísla by musela být v rámci experimentálních chyb totožná, jak tomu i ve skutečnosti je. Porovnáním výsledků mnoha měření dospěli fyzikové k nejpravděpodobnější hodnotě Planckovy konstanty

$$h = 6,626176 \cdot 10^{-34} \text{ J.s} .^{12}$$

Každá fyzikální teorie má svou fundamentální charakteristickou konstantu: Newtonova teorie gravitace konstantu gravitační, speciální teorie relativity rychlost světla ve vakuu, statistická fyzika konstantu Boltzmannovu. Podobně fundamentální roli hraje v kvantovém světě konstanta Planckova.

¹¹ Autorem pojmu kvanta elektromagnetického záření (fotonu) je Albert Einstein. Přestože byl inspirován Planckovými pracemi, s jeho pojetím elektromagnetického pole se Planck nikdy nesmířil. Tato kuriózní situace není v kvantové teorii nikterak vzácná. Samotný Einstein, jeden ze zakladatelů kvantové fyziky, do smrti odmítal dnes všeobecně přijímanou mechaniku Schrödingerovu.

¹² viz BROŽ J., ROSKOVEC V., VALOUCH M.

1.2 Měrná tepla pevných látek

[1] str. 460-464

Klasická teorie

Veličinu

$$c_V = \frac{1}{n} \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_{V=\text{konst.}}, \quad (1-13)$$

nazýváme molární tepelnou kapacitou soustavy při konstantním objemu. V (1-13) n označuje látkové množství látky obsažené v konstantním objemu V , které bylo dodáno infinitezimální teplo ΔQ , přičemž se její teplota změnila o malou hodnotu ΔT . Z první věty termodynamické vyplývá, že můžeme psát

$$c_V = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V,n}, \quad (1-13')$$

kde U je tzv. vnitřní energie soustavy¹³ a indexy V a n znamenají, že se jedná o parciální derivaci při konstantním objemu a látkovém množství.

Pro pevné látky byl již v minulém století znám empirický Dulong-Petitův zákon, který říká, že molární tepelné kapacity pevných látek jsou nezávislé na teplotě a pro všechny látky stejné, přesněji že platí

$$c_V = 3 R. \quad (1-14)$$

Ke stejnému výsledku vede i klasická teorie. Ta vycházela z klasické mechaniky, která tvrdí, že jakoukoliv mnohočástečnou soustavu o N částicích (atomární či molekulární krystal například) je možno za jistých speciálních podmínek (odpovídajících pevné fázi) popsat po vyloučení translačních a rotačních stupňů volnosti jako soustavu $3N-6$ nezávislých lineárních harmonických oscilátorů¹⁵. Protože statistická mechanika udává střední termální energii vibrací každého těchto oscilátorů (vztah (1-4)), nic nám nebrání v tom, abychom pro vnitřní energii této soustavy psali

$$U = (3N-6) k T \quad (1-15)$$

a tedy

$$c_V = (3-6/N) N_A k, \quad (1-15')$$

¹³ Vnitřní energii tělesa získáme odečtením translační a rotační (kinetické) energie od jeho celkové energie.

¹⁴ Uvedená relace však neplatí zcela přesně. Tak například pro diamant byly zjištěny významné odchylky experimentálních dat od Dulong-Petitova zákona, které nebylo možno vysvětlit chybami měření. Ač je to překvapující, diamant se tak stal jedním z prvních známých makroskopických projevů kvantového chování.

¹⁵ Blíže viz dodatek III.

kde N_A je Avogadrovo číslo. Vzhledem k definici Boltzmannovy konstanty k a také díky tomu, že N je velmi velké číslo, je vztah (1-15) totožný s tvrzením empirického zákona (1-14).

Jak již bylo uvedeno v poznámce k (1-14), existují látky, které závislost (1-14) nesplňují dostatečně přesně. Navíc Dulong-Petitův zákon byl získán z měření při pokojových a vyšších teplotách. A když se fyzikové začali koncem minulého století zajímat o chování tepelných kapacit pevných látek i při teplotách blízkých absolutní nule, zjistili, že experimentální data už vůbec nesouhlasí s předpovědí klasické fyziky. Ukázalo, že v této teplotní oblasti měrná tepla závisejí výrazně na teplotě a pro všechny látky platí

$$\lim_{T \rightarrow 0} c_V = 0 . \quad (1-16)$$

Pro ilustraci je situace zachycena na obrázku 1-B.

Einsteinův model pevné látky

Velmi jednoduché řešení problému měrných tepel pevných látek navrhl Albert Einstein (1907). Pevnou látku nadále chápal jako soustavou nezávislých lineárních harmonických oscilátorů. Obecně je každý z nich je charakterizován nějakou (kruhovou) frekvencí ω_α . Inspirován Planckovou hypotézou přiřadil Einstein těmto oscilátorům střední tepelnou energii (1-11) a pro vnitřní energii soustavy pak mohl psát

$$U(T) = \sum_{\alpha=1}^{3N} \frac{\hbar \omega_\alpha}{\exp\left(\frac{\hbar \omega_\alpha}{kT}\right) - 1} . \quad (1-17)$$

Aby si však maximálně zjednodušil situaci, předpokládal Einstein, že frekvence jednotlivých oscilátorů jsou velmi blízké, a položil je navzájem si rovny. Tato aproximace se nazývá **Einsteinovým modelem pevné látky (krystalu)**. Označme onu Einsteinovu úhlovou frekvenci (která je charakteristickým materiálovým parametrem každé látky) prostě ω . Pak již snadno dostaneme¹⁷

$$U(T) = \frac{3N \hbar \omega}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1} \quad \text{a} \quad (1-18)$$

$$c_V(T) = 3N_A k \frac{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) \left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right)^2}{\left(\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1\right)^2} . \quad (1-19)$$

¹⁶ Všimněte si, že v sumaci přes jednotlivé oscilátory je již vypuštěna nepodstatná korekce na translaci a rotaci systému jako celku.

¹⁷ Všechny výpočty si podrobně proveďte.

Všimněte si především, že vztah (1-19) přechází v limitě vysokých teplot na klasický výsledek (1-14) a současně v oblasti nízkých teplot klesá k nule, tj. splňuje vztah (1-16)¹⁸.

Pro ilustraci je závislost (1-19) vynesena do obrátku (1-B). Z něj je patrný kvalitativní souhlas Einsteinovy teorie s experimentem, ale i nezanedbatelné kvantitativní odchylky, které jsou způsobeny zjednodušujícím Einsteinovým předpokladem, že všechny oscilátory reprezentující pevnou látku mají stejnou frekvenci. Teprve přesnější výpočty založené na obecné formuli (1-17) (Debye, Born, Karmán) dosáhly nejen kvalitativní, ale i kvantitativní shody s experimentem. Proto i kvantové řešení problému tepelné kapacity pevných látek můžeme považovat za nezávislé potvrzení Planckovy kvantové hypotézy.

Uvědomte si rovněž, že vztahy typu (1-19) nám poskytují možnost určit hodnotu Planckovy konstanty z dat o pevných látkách (tedy z dat podstatně odlišných od těch, které fyzikové získali v souvislosti se zářením dokonale černého tělesa).

1.3 Einsteinova teorie fotoelektrického jevu

Problematika je podrobně popsána v citované literatuře. Poučení o problému nalezne čtenář zejména v

[1] str. 65 - 77 ,

[2] str. 61 - 65

a pochopitelně i v dalších učebnicích kvantové teorie.

1.4 Klasický a kvantový oscilátor

Na první pohled je zřejmé, že Planckova kvantová hypotéza a klasické představy o lineárním harmonickém oscilátoru se navzájem vylučují. Buď jsou energie lineárního harmonického oscilátoru skutečně kvantovány, nebo je správná klasická představa o jejich spojitém rozložení na nezáporné části reálné osy. Předcházející úvahy hovoří jasně ve prospěch kvantové verze. Na druhé straně však z vlastní zkušenosti víte, že v běžných podmínkách žádné kvantování energie oscilátoru nepozorujeme.

Vezměme si například hmotný bod (kuličku) zavěšený na pružině. Z mechaniky víte, že celková energie takové kmitající soustavy je úměrná druhé mocnině amplitudy výchylky bodu z rovnovážné polohy. Je-li tedy energie kvantována, musí být stejným způsobem kvantována i zmíněná amplituda. Jinými slovy amplituda výchylky hmotného bodu z rovnovážné polohy by se měla v důsledku působení vnější síly měnit skokem. Přestože jste podobný systém podrobně studovali v praxi, nic podobného jste jistě nepozorovali. Zdá se tedy, že v přírodě existují dva typy oscilátorů. Klasické, jejichž energie není kvantována - kulička na pružině, matematické a fyzické kyvadlo - a kvantové, jejichž energie a všechny ostatní příbuzné veličiny se mění skokem - elektromagnetické stojaté vlny, mřížové atomy v krystalu. Podobná představa je ovšem značně nehezká a navíc narušuje naše představy o jednotě světa. Dříve však než rozhodneme otázku, jak to vlastně s kvantovými a nekvant-

¹⁸ Viz též příklady k této kapitole.

tovými oscilátory ve skutečnosti je, odložte na chvíli skriptum a vyřešte následující dva příklady.

Příklad 1

Nalezněte kvantové energetické hladiny kuličky o hmotnosti 1 g zavěšené na pružině a vykonávající harmonické lineární kmity s frekvencí 10 Hz. Nalezněte rovněž přípustné hodnoty amplitudy těchto kmitů.

V běžných podmínkách je amplituda rovna řádově centimetrům. Položme ji tedy rovnu 10 cm. Určete této amplitudě odpovídající energii kmitající kuličky.

Pochopitelně všechna měření, která jste prováděli v praxi, byla zatížena experimentálními chybami. Pokud jste byli pečliví, dosáhli jste chyb přibližně 1%. Srovnajte tuto chybu pro výše získanou energii i amplitudu se „vzdáleností“ sousedních přípustných hodnot povolených Planckovou kvantovou hypotézou.

Příklad 2

Kmity molekuly oxidu uhelnatého (CO) je možno za pokojových teplot považovat za harmonické. Určete přípustné hodnoty energie těchto kmitů, mají-li frekvenci $2 \cdot 10^{14}$ Hz.

Změny vibrační energie molekuly můžeme měřit například s pomocí neelastického rozptylu. Chyba určení energie je pak řádově 0.01 eV. Srovnajte opět tuto hodnotu se vzdáleností energetických hladin vibrací CO.

Určete kvantově přípustné hodnoty amplitud studovaných vibrací a porovnejte rozdíly mezi nimi se střední vzdáleností atomů v molekule, která činí $1.13 \cdot 10^{-10}$ m.

Poté, co jste vyřešili oba výše uvedené příklady, jistě již tušíte, že Planckova kvantová hypotéza není ve sporu s vašimi zkušenostmi s „typicky klasickými“ oscilátory, s nimiž jste se setkali dříve.

Z prvního příkladu totiž plyne, že kvantování těchto oscilátorů je běžnými experimentálními prostředky nepozorovatelné. Dokonce ani sebedokonalejší technicky realizovatelný experiment (tj. takový, v němž dosáhneme velmi malých chyb) není sto kvantové efekty odhalit. Ty totiž zanikají ve vždy přítomných experimentálních chybách. Situace je obdobná jako v molekulární teorii plynů. Nikdo dnes nepochybuje o tom, že se plyny (ale i kapaliny či pevné látky) skládají z atomů a molekul. Jedná se o jakési kvantování hmotnosti. Přesto ale nejsme schopni v reálném makroskopickém experimentu zaregistrovat efekt přírůstku jednoho atomu či molekuly. Jednoduše proto, že chyby určení počtu částic v typickém makrosystému jsou řádově o 15 až 20 řádů vyšší. Důsledkem tohoto faktu je klasická teorie kontinua, která chápe hmotu jako spojitě rozloženou v určité oblasti prostoru. V mnoha případech dává tato představa výsledky, které jsou v dokonalé shodě s experimentem. Existují však reálné situace (například ve fyzice nízkých tlaků), kdy s klasickým kontinuem nevystačíme. Musíme jej nahradit modelem přesnějším. Jistě snadno naleznete analogii vzájemného vztahu mechanického kontinuum - atomární teorie se vztahem kvantového a klasického popisu.

Druhý příklad ukazuje, za jakých okolností se mohou kvantové efekty projevit. Nejen v případě harmonických oscilátorů můžeme očekávat, že se s kvantováním budeme především setkávat v systémech, pro něž jsou charakteristické malé vzdálenosti, hmotnosti a energie - ve světě atomů, molekul a elementárních částic, v tzv. mikrosvětě¹⁹.

¹⁹ Neznamená to ale, že by se kvantové efekty nemohly projevit i na makroskopické úrovni. Se dvěma makroskopickými kvantovými jevy jsme se již setkali. Jedná se o záření černého tělesa a měrná tepla pevných látek. Z dalších bychom mohli uvést supravodivost či supratekutost.

Všimněte si rovněž dalšího zajímavého faktu. Systém prvního příkladu je charakterizován vysokými hodnotami kvantového čísla. Na druhé straně za běžných podmínek se kvantově chovající molekula oxidu uhelnatého nachází v základním resp. některém z prvních excitovaných vibračních stavů ($n=0,1,\dots$)²⁰. Tento principiální rozdíl obou diskutovaných systémů nachází obecné vyjádření v tzv. Bohrově **principu korespondence**, s nímž se budeme neustále setkávat i v následujících kapitolách a který říká, že

Obecně kvantový systém se v limitě vysokých kvantových čísel chová zcela podle zákonů klasické fyziky.

Klasická mechanika je tedy přiblížením nám zatím neznámé přesnější (kvantové) mechaniky v asymptotické oblasti vysokých kvantových čísel.

Na samotný závěr našeho povídání o Planckově kvantovém oscilátoru se vraťme ještě jednou ke vzorcům pro výpočet střední energie lineárního harmonického oscilátoru: klasickému (1-3) a kvantovému (1-10). Provedeme-li v (1-3) substituci $x = E/kT$, získáme

$$e(T) = kT \frac{\int_0^{+\infty} x \exp(-x) dx}{\int_0^{+\infty} \exp(-x) dx} . \quad (1-20)$$

Podobně substituce $x_n = E_n/kT$ v (1-10) dá

$$e(T) = kT \frac{\sum_0^{+\infty} x_n \exp(-x_n)}{\sum_0^{+\infty} \exp(-x_n)} . \quad (1-21)$$

Všichni jistě dobře znáte obdélníkové pravidlo pro přibližný výpočet integrálu

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \approx \sum_{n=0}^{+\infty} f(n\Delta x) \Delta x , \quad (1-22)$$

kde přibližná rovnost je tím přesnější, čím menší je přírůstek nezávislé proměnné Δx . Snadno zjistíte, že vztah (1-20) přechází po aplikaci (1-22) na (1-21). Tímto ale získáváme

kritérium platnosti klasického přiblížení : $\frac{h\omega}{kT}$ musí být velmi malé. Protože veličina kT

hraje ve statistické termodynamice roli charakteristické tepelné energie vztažené na jeden stupeň volnosti, můžeme říci, že kvantové efekty jsou zanedbatelné, je-li tato energie výrazně větší než vzdálenost dvou sousedních přípustných energetických hladin a naopak.

²⁰ Planckův popis lineárního harmonického oscilátoru není zcela přesný. Jeho zdokonalení nám poskytne až Schrödingerova kvantová mechanika. Zde pouze uveďme, že základnímu stavu $n=0$ neodpovídá přesně nulová energie. Molekula vykonává i základním vibračním stavu jakési kmity, které fyzikové nazývají nulovými. O nich ale až později.

Proto také v oblasti vyšších teplot platí například Dulong-Petitův zákon velmi přesně. Ovšem, kam přesně tyto „vyšší teploty“ lokalizujeme, záleží na charakteristické frekvenci Einsteinova modelu. Pro většinu pevných látek je možno za „vyšší“ považovat již teploty pokojové. Na druhé straně silná vazba mezi atomy uhlíku v diamantu způsobuje, že pro tuto látku jsou „vyššími“ až teploty řádově několik tisíc Kelvinů.

Dodatek I

Rozklad elektromagnetického pole v dutině na soustavu nezávislých lineárních harmonických oscilátorů

Z přednášek o elektrodynamice víte, že elektromagnetické pole ve vakuu je možno za nepřítomnosti volných nábojů popsat vektorovým potenciálem \mathbf{A} , který splňuje vlnovou rovnici

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.I-1)$$

a tzv. Coulombovu kalibrační podmínku

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \quad (1.I-2)$$

kde c je rychlost světla ve vakuu a Δ resp. div jsou Laplaceův operátor resp. operátor divergence²¹.

Těmito rovnicemi se bude zřejmě řídit i dutinové záření, neboť nepřítomnost volných nábojů v dutině je v běžných experimentálních podmínkách zajištěna. Fakt, že je dutina obvykle vyplněna vzduchem, změní v (1.I-1) pouze hodnotu parametru c , a to jen nepatrně.

K popisu dutinového záření použijeme tedy obě výše uvedené rovnice, které budeme řešit v dutině speciálního tvaru: kvádru o stranách L_x , L_y a L_z s hranami rovnoběžnými se souřadnicovými osami²². S pomocí Fourierových řad je totiž možno v tomto speciálním případě rozložit vektorovou funkci \mathbf{A} do nekonečné řady (Fourierova řada, rozklad do rovinných vln)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n_x=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_y=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_z=-\infty}^{+\infty} \mathbf{a}(t, n_x, n_y, n_z) \exp\left(i \frac{2\pi}{L_x} n_x x + i \frac{2\pi}{L_y} n_y y + i \frac{2\pi}{L_z} n_z z\right). \quad (1.I-3)$$

Pro zjednodušení zápisu položíme $\mathbf{k}_i = (2\pi/L_i)\mathbf{n}_i$ ($i = x, y, z$). Ve vektoru $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ snadno později identifikujeme vlnový vektor příslušné rovinné monochromatické vlny.

Po dosazení (1.I-3) do vlnové rovnice (1.I-1) získáme při současném využití lineární nezávislosti imaginárních exponenciálních funkcí pro různá $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$

²¹ Ač to není explicitně vyjádřeno, vektorový potenciál je funkcí polohy \mathbf{r} a času t . Měli bychom tedy psát $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$.

²² Speciální tvar dutiny volíme pro jednoduchost následujících matematických operací. Na obecnosti našeho pojednání to však příliš nezmění. Bylo totiž dokázáno, že tvar hranice dutiny, v níž se nachází elektromagnetické záření, ovlivní jeho vlastnosti pouze velmi blízko stěn dutiny. To ale u makroskopických dutin (rozměr výrazně převyšuje dominující vlnovou délku) nehraje podstatnou roli. Stručně řečeno: Výsledky získané pro naše speciální uspořádání budeme moci bez potíží rozšířit i na případ obecného tvaru dutiny.

$$\ddot{\mathbf{a}}(\mathbf{t}, \mathbf{n}) + \omega^2 \mathbf{a}(\mathbf{t}, \mathbf{n}) = \mathbf{0}, \quad (1.I-4)$$

kde jsme tečkami nad \mathbf{a} označili druhou derivaci podle času a kde $\omega = |\mathbf{k}| c$. Všimněte si, že získaná rovnice nápadně připomíná pohybovou rovnici pro trojrozměrný harmonický oscilátor. Vztah (1.I-4) je ve skutečnosti ale nekonečnou soustavou rovnic, neboť vektor \mathbf{n} probíhá všechny body trojnásobného kartézského součinu množiny celých čísel. Proto základní rovnice (1.I-1) popisuje vlastně nekonečnou soustavu těchto oscilátorů.

Aplikací rozkladu (1.I-3) v Coulombově kalibrační podmínce (1.I-2) získáme

$$\mathbf{a}(\mathbf{t}, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{k}(\mathbf{n}) = 0. \quad (1.I-5)$$

Tedy amplitudy rovinných vln \mathbf{a} musí být vždy kolmé k vlnovému vektoru \mathbf{k} ²³, kmity výše zavedených oscilátorů jsou proto vázány na rovinu kolmou k tomuto vektoru.

Vidíme tedy, že jsme s pomocí Fourierových řad typu (1.I-3) rozložili elektromagnetické pole uzavřené v dutině ve tvaru kvádra na nekonečnou soustavu dvojrozměrných harmonických oscilátorů, jejichž rovina kmitů i frekvence jsou jednoznačně určeny vlnovým vektorem \mathbf{k} .

²³ Což neznamená nic jiného než, že elektromagnetické vlnění je vlnění příčné.

Dodatek II

Spektrální hustota počtu lineárních harmonických oscilátorů, na něž se rozkládá elektromagnetické pole v dutině.

Každý z rovinných oscilátorů zavedených v předcházejícím dodatku jednoznačně určuje vlnový vektor \mathbf{k} . Každému oscilátoru odpovídá právě jeden vlnový vektor a naopak každému vlnovému vektoru výše uvedeného speciálního tvaru odpovídá právě jeden dvojrozměrný oscilátor. (Připomeňme ještě jednou, že tyto uměle zavedené oscilátory odpovídají rovinným monochromatickým vlnám.) V \mathbb{R}^3 (trojnásobný kartézský součin reálných čísel) můžeme tedy znázornit každý oscilátor bodem. Všechny tyto body zaplní \mathbb{R}^3 rovnoměrně prostou mřížkou, jejíž elementární buňka má tvar kvádru se stranami $2\pi/L_i$ ($i=x,y,z$). Hustota těchto bodů v \mathbb{R}^3 bude tedy $V/(2\pi)^3$, kde $V = L_x L_y L_z$ je objem studované dutiny.

Nás ovšem zajímá, kolik těchto bodů padne do oblasti odpovídající frekvencím z intervalu $(\omega, \omega+d\omega)$.

Především změně frekvence o $d\omega$ odpovídá změna velikosti vlnového vektoru $dk = 1/c d\omega$. Bude-li toto dk mnohem větší než největší rozměr elementární buňky mřížky v prostoru vlnových vektorů, můžeme psát pro počet bodů, které padnou do kulové slupky $(k, k+dk)$,

$$dN(k, dk) = 4\pi k^2 dk \frac{V}{(2\pi)^3}, \quad (1.II-1)$$

kde první část pravé strany odpovídá „objemu“ této slupky v prostoru vlnových vektorů a druhá část hustotě bodů odpovídajících jednotlivým oscilátorům. Dosadíme-li do (1.II-1) dále vyjádření k a dk s pomocí ω a $d\omega$ a uvědomíme-li si, že rovinné harmonické kmity jsou superpozicí dvou nezávislých lineárních kmitů, získáme pro počet *lineárních harmonických oscilátorů* (v rozkladu pole) s frekvencemi z intervalu $(\omega, \omega+d\omega)$ následující vyjádření

$$dN(\omega, d\omega) = \frac{\omega^2 V}{\pi^2 c^3} d\omega. \quad (1.II-2)$$

Dodatek III

Malé kmity mnohočasticových soustav

Cílem tohoto dodatku je ukázat, že malé kmity soustavy hmotných bodů kolem minima potenciální energie je možno v jisté aproximaci popsat jako kmity soustavy nezávislých lineárních harmonických oscilátorů.

Obecně dynamiku soustavy N hmotných bodů popisujeme Lagrangeovou funkcí

$$L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2 - V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N), \quad (1.III-1)$$

kde \mathbf{r}_k je polohový vektor k -tého hmotného bodu, m_k jeho hmotnost a V potenciální energie soustavy. Požadujeme-li navíc, aby se soustava nepohybovala jako celek, tj. aby její těžiště bylo v klidu (pro jednoduchost je ztotožníme s počátkem souřadnic) a její celkový moment hybnosti byl ve zvoleném souřadnicovém systému nulový, podléhá její dynamika šesti nezávislým vazbám

$$\sum_{k=1}^N m_k \mathbf{r}_k = \mathbf{0} \quad (1.III-2)$$

$$\sum_{k=1}^N m_k [\mathbf{r}_k \times \dot{\mathbf{r}}_k] = \mathbf{0}. \quad (1.III-3)$$

Obecně je takto formulovaný dynamický problém velmi složitý, obvykle dokonce analyticky neřešitelný. Situace se ale velmi zjednoduší, předpokládáme-li, že soustava hmotných bodů koná malé kmity kolem tzv. rovnovážných poloh. Při splnění podmínek (1.III-2,3) nabývá soustava minimální energie, odpovídá-li její konfigurace v prostoru minimu potenciální energie V . Pro takovou konfiguraci \mathbf{r}_{0k} pak pro každé k a j platí

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_k}(\mathbf{r}_{01}, \dots, \mathbf{r}_{0N}) = \mathbf{0} \quad (1.III-4)$$

a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{r}_k \partial \mathbf{r}_j}(\mathbf{r}_{01}, \dots, \mathbf{r}_{0N}) \text{ je pozitivně definitní matice.} \quad (1.III-5)$$

Označíme-li malé výchylky z rovnovážných poloh \mathbf{u}_k , tedy $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{0k} + \mathbf{u}_k$, můžeme vztahy (1.III-1,2,3) přepsat s pomocí Taylorova rozvoje druhého řádu na přibližný tvar

$$L(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N, \dot{\mathbf{u}}_1, \dots, \dot{\mathbf{u}}_N) \approx \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \dot{\mathbf{u}}_k^2 - \sum_{k,j=1}^N \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \frac{1}{2} K_{kj}^{\alpha\beta} u_k^\alpha u_j^\beta - V(\mathbf{r}_{01}, \dots, \mathbf{r}_{0N}), \quad (1.III-1')$$

kde latinské indexy čísují jednotlivé částice uvažované soustavy a indexy řecké kartézské složky vektorů a

$$K_{kj}^{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 V}{\partial r_k^\alpha \partial r_j^\beta}(\mathbf{r}_{01}, \dots, \mathbf{r}_{0N})$$

je pozitivně definitní matice. A dále

$$\sum_{k=1}^N m_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0} \quad (1.III-2')$$

$$\sum_{k=1}^N m_k [\mathbf{r}_{k0} \times \dot{\mathbf{u}}_k] \approx \mathbf{0}.^{24} \quad (1.III-3')$$

Z posledního vztahu můžeme dále získat²⁵

$$\sum_{k=1}^N m_k [\mathbf{r}_{k0} \times \mathbf{u}_k] \approx \mathbf{0}. \quad (1.III-3'')$$

S pomocí vazebných podmínek (1.III-2') a (1.III-3'') je možno Lagrangeovu funkci přepsat do tvaru

$$L(q_1, \dots, q_{3N-6}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N-6}) = \frac{1}{2} \sum_{I,J=1}^{3N-6} (\mu_{IJ} \dot{q}_I \dot{q}_J - k_{IJ} q_I q_J), \quad (1.III-6)$$

kde jsme zavedli nové zobecněné souřadnice podle schématu:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= (q_1, q_2, q_3), \\ \mathbf{u}_2 &= (q_4, q_5, q_6), \\ &\dots, \\ \mathbf{u}_{n-2} &= (q_{3N-8}, q_{3N-7}, q_{3N-6}). \end{aligned}$$

Matice μ_{IJ} a k_{IJ} bychom mohli po troše úsilí vyčíslit s pomocí již dříve zavedené matice $K_{kj}^{\alpha\beta}$ a hmotností jednotlivých částic m_k . To však naštěstí nebude zapotřebí. V následujícím nám postačí uvědomit si, že se jedná o symetrické pozitivně definitní matice. Maticovým zápisem pak můžeme formuli (1.III-6) ještě dále alespoň formálně zjednodušit

$$L = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}^T \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}). \quad (1.III-7)$$

Zde \mathbf{q} a $\dot{\mathbf{q}}$ jsou sloupcové vektory řádu $3N-6$, $\boldsymbol{\mu}$ a \mathbf{k} čtvercové matice téhož řádu, tečkou značíme obvyklý maticový součin a indexem T maticovou transpozici.

Přerušme ale na chvíli nit našich úvah. Pamatujete si ještě, co je jejich cílem? Neztratil se tento cíl v matematických složitostech? Pokud je to nutné, přečtěte si znovu úvodní odstavec tohoto dodatku.

²⁴ Zde jsme zanedbali členy typu $\mathbf{u}_k \times \dot{\mathbf{u}}_k$, které jsou druhého řádu a pro malé kmity tedy nepodstatné.

²⁵ Pořádně si rozmyslete, proč je možný přechod od (1.III-3') k (1.III-3'').

V dalším se neobejdeme bez některých základních poznatků lineární algebry. Proto si je zopakujeme:

Věta 1: Pozitivně definitní matici je možno jednoznačně odmocnit. Tj. je-li \mathbf{A} pozitivně definitní matice, pak existuje jediná pozitivně definitní matice \mathbf{B} , která splňuje

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} .$$

Matici \mathbf{B} pak obvykle též označujeme symbolem $\sqrt{\mathbf{A}}$.

Věta 2: Je-li \mathbf{A} symetrická matice, pak existuje ortogonální matice \mathbf{U} taková, že matice

$$\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}$$

má nenulové členy pouze na diagonále.

S pomocí těchto vět můžeme dále upravit Lagrangeovu funkci (1.III-7). Především po zavedení nových zobecněných souřadnic

$$\tilde{\mathbf{q}} = \sqrt{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{q}$$

Lagrangeova funkce nabývá tvar

$$L = \frac{1}{2} \left(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \tilde{\mathbf{q}}^T \cdot \sqrt{\boldsymbol{\mu}}^{-1} \cdot \mathbf{k} \cdot \sqrt{\boldsymbol{\mu}} \cdot \tilde{\mathbf{q}} \right). \quad (1.III-8)$$

Symetrickou matici $\sqrt{\boldsymbol{\mu}}^{-1} \cdot \mathbf{k} \cdot \sqrt{\boldsymbol{\mu}}$ můžeme ovšem podle Věty 2 diagonalizovat s pomocí jisté ortogonální matice \mathbf{U} . Zavedeme-li další zobecněné souřadnice

$$\mathbf{Q} = \mathbf{U}^T \cdot \tilde{\mathbf{q}},$$

můžeme konečně psát

$$L = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^{3N-6} \left(\dot{Q}_I^2 - \Omega_I Q_I^2 \right), \quad (1.III-9)$$

kde Ω_I jsou nenulové elementy diagonalizované matice $\mathbf{U}^T \cdot \sqrt{\boldsymbol{\mu}}^{-1} \cdot \mathbf{k} \cdot \sqrt{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{U}$. Ovšem z tvaru Lagrangeovy funkce (1.III-9) již okamžitě plyne, že dynamika malých kmitů mnohočásticové soustavy je totožná s dynamikou soustavy nezávislých lineárních harmonických oscilátorů, což jsme chtěli ukázat.

Příklady

1) Na základě vztahu (1-3) určete střední energii klasického lineárního harmonického oscilátoru.

2) Určete součet řady $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n$ ($q < 1$) derivováním součtu geometrické řady s kvocientem q . Na základě získaného výsledku odvoďte (1-11) z (1-10).

3) Ukažte, že Planckova formule (1-12) přechází v limitě velkých ω na formuli Wienovu (1-7) a v limitě malých ω na Rayleigh-Jeansův zákon.

4) Zformulujte Planckův zákon jako spektrální rozklad hustoty zářivé energie podle vlnových délek.

5) Z Planckova zákona odvoďte tzv. Wienův posunovací zákon $\lambda_{\max} T = \text{konst.}$, kde λ_{\max} je vlnová délka, při níž pravá strana (1-12) nabývá maximální hodnoty. Navrhněte způsob určení hodnoty Planckovy konstanty na základě Wienova posunovacího zákona.

6) Ukažte, že objemová hustota energie záření dokonale černého tělesa je úměrná čtvrté mocnině teploty (Stephan-Boltzmannův zákon). Navrhněte způsob určení hodnoty Planckovy konstanty na základě Stephan-Boltzmannova zákona.

7) Formulujte nezbytné vztahy pro určení Planckovy konstanty metodou nejmenších čtverců přímo z Planckova zákona.

8) Odvoďte vztah (1-19) ze vztahu (1-18).

9) Ukažte, že ze vztahu (1-19) plyne $\lim_{T \rightarrow +\infty} c_v(T) = 3R$, kde R je univerzální plynová konstanta.

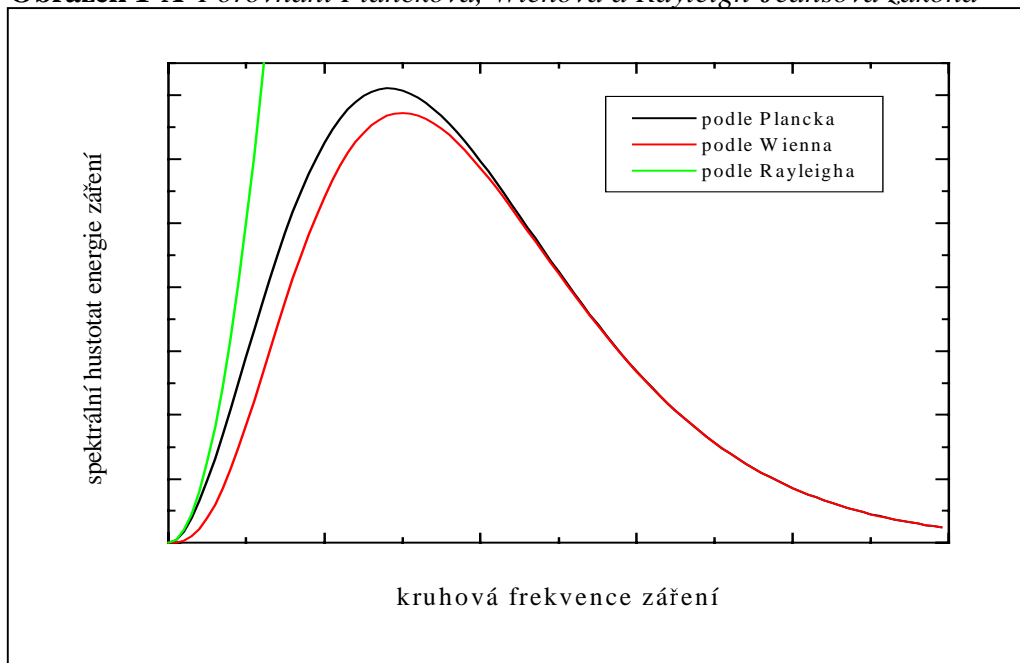
10) Ukažte, že ze vztahu (1-19) plyne $\lim_{T \rightarrow 0} c_v(T) = 0$.

Propočtěte si rovněž příklady z [1] na str. 88-89²⁶.

²⁶ Některé z těchto příkladů jsou věnovány Comptonovu efektu, o němž jsme se zde nezmínili. Měli byste se však s ním setkat v kursech speciální teorie relativity a atomové fyziky. Proto si tyto příklady rovněž propočtěte.

Obrázky

Obrázek 1-A Porovnání Planckova, Wienova a Rayleigh-Jeansova zákona



Obrázek 1-B Porovnání Dulong-Petitova zákona s Einsteinovým modelem

