2. Integrální počet polí

Úloha 1
Vypočtěte pomocí křivkového integrálu práci pole $\vec{F}$ po křivce $\vec{l}$:
a) $\vec{l}(t) = (t, t^2), t \in (-1, 1), \vec{F}(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$
b) $\vec{l}(t) = (1 + t, 1 + 2t, 1 + 3t), t \in (0, 1), \vec{F}(x, y, z) = (x, y, x + y - 1)$
c) $\vec{l}(t) = (2\cos t, -3\sin t, 0), t \in (0, \frac{\pi}{2}), \vec{F}(x, y, z) = (\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}), r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Úloha 2
Délka křivky $\vec{\varphi} : \langle a, b\rangle \to \mathcal{R}$ je definována jako

$$\int_{\vec{\varphi}} 1 \,\mathrm{d}\varphi = \int_a^b \left| \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t} \right| \mathrm{d}t.$$

Vypočítejte ji pro následující křivky (r je konstanta):
a) $\vec{\varphi}(t) = (t, t), t \in (0, 1)$
b) $\vec{\varphi}(t) = (r\cos t, 0, r\sin t), t \in (0, 2\pi)$
c) $\vec{\varphi}(t) = (3t - 2, 2t + 1, 6t), t \in (0, a)$

Úloha 3
Obsah plochy $\vec{\sigma} : \Sigma \to \mathcal{R}^3, (\Sigma \subset \mathcal{R}^2)$ je definován jako

$$\int\!\!\int_{\vec{\sigma}} 1 \,\mathrm{d}\sigma = \int\!\!\int_{\Sigma} \left| \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial t_1} \times \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial t_2} \right| \mathrm{d}t_1 \,\mathrm{d}t_2.$$

Vypočítejte obsah následujících ploch (t_1, t_2 jsou konstanty):
a) $\vec{\sigma}(t_1, t_2) = (t_1, t_2, 0), t_1 \in (-2, 1)t_2 \in (0, 1)$
b) $\vec{\sigma}(t_1, t_2) = (r\cos t_1, r\sin t_1, t_2), t_1 \in (0, 2\pi), t_2 \in (0, v)$
c) $\vec{\sigma}(t_1, t_2) = (r\cos t_1 \sin t_2, r\sin t_1 \sin t_2, r\cos t_2), t_1 \in (0, 2\pi), t_2 \in (0, \pi)$

Úloha 4
Ověřte, zda je pole $\vec{F}$ potenciálové a nalezněte jeho potenciál (Q_1, Q_2, π, ϵ jsou konstanty):
a) $\vec{F}(x, y) = (x, y)$
b) $\vec{F}(x, y, z) = (2y, 2x + 3z, 3y)$
c) $\vec{F}(x, y, z) = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon} \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$