1. Diferenciální počet polí

Úloha 1
Určete gradient skalárního pole ($\vec{r} = (x, y, z)$ je polohový vektor)
a) $u(x, y, z) = r^2$,
b) $u(x, y, z) = r^3$,
c) $u(x, y, z) = \vec{c}\,\vec{r}$, kde $\vec{c}$ je konstantní vektor,
d) $u(x, y, z) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$, kde Q_1, Q_2, π, ϵ jsou konstanty.

Úloha 2
Určete divergenci a rotaci vektorového pole
a) $\vec{F}(x, y, z) = \vec{r}$,
b) $\vec{F}(x, y, z) = \frac{\vec{r}}{r}$.

Úloha 3
Dokažte, že pro libovolná skalární pole u, v, konstantu c, funkci jedné proměnné f a libovolná vektorová pole $\vec{a}, \vec{b}$ platí
a) $\operatorname{grad}(cu) = c \operatorname{grad} u$,
b) $\operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u$,
c) $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$,
d) $\operatorname{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{div} \vec{b}$,
e) $\operatorname{div}(u\vec{a}) = u \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \operatorname{grad} u$,
f) $\Delta \operatorname{grad} u = \operatorname{grad} \Delta\, u$.