3. ÚVOD DO ANALYTICKÉ GEOMETRIE

3.1. ANALYTICKÁ GEOMETRIE PŘÍMKY

V této kapitole se dozvíte:

- jak popsat bod v rovině a v prostoru;
- vzorec na výpočet vzdálenosti dvou bodů;
- základní tvary rovnice přímky v rovině a v prostoru;
- jak analyzovat vzájemnou polohu bodu a přímky v rovině a v prostoru včetně jejich vzdálenosti;
- jak analyzovat vzájemnou polohu dvou přímek v rovině a v prostoru včetně jejich vzdálenosti.

Klíčová slova této kapitoly: polohový vektor bodu, vzdálenost bodů, parametrická, obecná (normálová) a směrnicová rovnice přímky, vzájemná poloha bodu a přímky, vzdálenost bodu a přímky, vzájemná poloha dvou přímek, vzdálenost dvou přímek.

Čas potřebný k prostudování učiva kapitoly:
0,75 + 1,0 hodiny (teorie + řešení příkladů)

Popis bodu.

V geometrii se body značí velkými písmeny, např. A, B atd. Zavedeme-li kartézský souřadný systém, můžeme každý bod jednoznačně popsat jeho polohovým vektorem, např. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ atd. Obecný polohový vektor se často značí $\mathbf{r}$ (radius vektor) a jeho složky x, y (v rovině) nebo x, y, z (v prostoru). Většinou ale používáme k rozlišení složek vektorů číselné indexy 1, 2 (v rovině) nebo 1, 2, 3 (v prostoru).

Vzdálenost dvou bodů.

Vzdálenost dvou bodů A, B je dána (Euklidovskou) velikostí rozdílu jejich polohových vektorů:

$$\boxed{d(\mathrm{A,B}) = |\mathbf{b}-\mathbf{a}| = \sqrt{\sum_i (b_i - a_i)^2}},$$

kde $i = 1,2$ v rovině a $i = 1,2,3$ v prostoru.

Parametrická rovnice přímky v rovině a prostoru.

Parametrická rovnice přímky má tvar

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})},$$

kde $\mathbf{r}$ je polohový vektor libovolného bodu X přímky, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ jsou polohové vektory dvou různých pevně zvolených bodů A, B (určujících přímku) a $t \in R$ je parametr, probíhající všechny reálné hodnoty. Vektor

$$\boxed{\mathbf{u} = \mathbf{b}-\mathbf{a}}$$

se nazývá *směrový vektor* a je rovnoběžný se směrem přímky. Všimněte si, že probíhá-li parametr *t* interval $\langle 0,\ 1\rangle$, probíhá bod P úsečku AB.

Uvedená vektorová rovnice obsahuje v sobě dvě (v rovině), resp. tři (v prostoru) skalární rovnice $x_i = a_i + t(b_i - a_i)$, $i = 1,\ 2$, resp. $i = 1,\ 2,\ 3$ pro souřadnice bodů X, A, B.

Obecná (normálová) rovnice přímky v rovině.

Obecnou rovnicí přímky v rovině je rovnice tvaru

$$\boxed{ax + by + c = 0}, \text{ vektorově } \boxed{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} + c = 0},$$

kde $a,b,c \in R$, a nebo b je různé od nuly a $x,y \in R$ jsou souřadnice libovolného bodu přímky, $\mathbf{r} \equiv (x,\ y)$ jeho polohový vektor a $\mathbf{n} \equiv (a,\ b)$ tzv. *normálový vektor* přímky.

Obecnou rovnici přímky lze odvodit z její parametrické rovnice vyloučením parametru *t*. Tím bychom také zjistili, že platí $a = -u_2$, $b = u_1$, kde $\mathbf{u} = (u_1,\ u_2)$ je výše zmíněný směrový vektor přímky. Platí tedy $\mathbf{n} \perp \mathbf{u}$ (možno se přesvědčit skalárním součinem), odkud plyne označení vektoru $\mathbf{n}$ jako normálového vektoru přímky.

Směrnicový tvar rovnice přímky v rovině.

Směrnicovým tvarem rovnice přímky v rovině je rovnice tvaru

$$\boxed{y = kx + q},$$

kde $k, q \in R$ a $x, y \in R$ jsou souřadnice libovolného bodu přímky. Směrnice *k* je tangenta úhlu, který svírá přímka s kladným směrem osy x. Vztah mezi koeficienty a, b obecné rovnice a koeficienty k, q je dán rovnicemi $k = -\frac{a}{b}$, $q = -\frac{c}{b}$, které obdržíme, když z obecné rovnice vypočteme *y*. Směrnicový tvar nelze použít, je-li $b = 0$, tj. přímka je rovnoběžná s osou *y*.

Pozor! Obecná ani směrnicová rovnice přímky v prostoru neexistuje! Důvod je prostý. Jediná rovnice snižuje počet nezávislých souřadnic o jednu, popisuje proto v prostoru dvojrozměrný útvar (plochu), ale přímka jakožto křivka je jednorozměrným útvarem.

Vzájemná poloha bodu a přímky v rovině a prostoru.

Bod P je prvkem přímky p ($\mathrm{P} \in p$) právě tehdy, pokud jeho souřadnice vyhovují rovnici této přímky.

V rovině je vzdálenost bodu $\mathrm{P} = (x_P, y_P)$ od přímky p: $ax + by + c = 0$ dána vzorcem

$$\boxed{d(\mathrm{P}, p) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}.$$

V prostoru je vzdálenost bodu P s polohovým vektorem $\mathbf{r}_P$ od přímky $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{u}$ dána vzorcem

$$\boxed{d(\mathrm{P}, p) = \frac{|(\mathbf{r}_\mathrm{P} - \mathbf{a}) \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}}.$$

Tento vzorec můžeme použít také v rovině, zavedeme-li u vektorů nulové třetí složky.

Vzájemná poloha dvou přímek v rovině a prostoru.

Přímky *p, q* mohou být:

a) *totožné*, pokud mají neprázdný průnik a jejich směrové vektory jsou kolineární (rovnoběžné);
b) *rovnoběžné různé*, pokud mají prázdný průnik a jejich směrové vektory jsou kolineární;
c) *různoběžné*, pokud mají neprázdný průnik a jejich směrové vektory nejsou kolineární;

V prostoru navíc:
d) *mimoběžné*, pokud mají prázdný průnik a jejich směrové vektory nejsou kolineární.

Vyšetření polohy dvou přímek spočívá tedy nejprve ve zjištění, zda jejich směrové vektory jsou či nejsou kolineární, a poté v určení, zda jejich průnik je prázdný či neprázdný.

Vzdálenost dvou rovnoběžek je dána vzdáleností libovolného bodu jedné přímky od druhé přímky.

Vzdálenost dvou mimoběžek $\mathbf{r} = \mathbf{a}_p + t_p \cdot \mathbf{u}_p$, $\mathbf{r} = \mathbf{a}_q + t_q \cdot \mathbf{u}_q$ je dána vzorcem

$$\boxed{d(p,\ q) = \frac{\left\|\left[\left(\mathbf{a}_q - \mathbf{a}_p\right)\mathbf{u}_p\mathbf{u}_q\right]\right\|}{\left|\mathbf{u}_p \times \mathbf{u}_q\right|}},$$

kde $\left[\left(\mathbf{a}_q - \mathbf{a}_p\right)\mathbf{u}_p\mathbf{u}_q\right] \equiv \left(\mathbf{a}_q - \mathbf{a}_p\right)\left(\mathbf{u}_p \times \mathbf{u}_q\right)$ je smíšený součin vektorů $\left(\mathbf{a}_q - \mathbf{a}_p\right)$, $\mathbf{u}_p$, $\mathbf{u}_q$.

Odchylka přímek (různoběžných i mimoběžných) je ostrý, příp. pravý úhel α, který svírají směrové vektory $\mathbf{u}_p$, $\mathbf{u}_q$ těchto přímek. Platí:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_q}{\left|\mathbf{u}_p\right| \cdot \left|\mathbf{u}_q\right|}}.$$

V rovině lze místo směrových vektorů užít normálové vektory přímek.

Shrnutí kapitoly:

Analytická geometrie se zabývá matematickým popisem geometrických objektů.

Bod popisujeme příslušným polohovým vektorem, v rovině dvourozměrným, v prostoru trojrozměrným. Vzdálenost mezi dvěma body počítáme Euklidovskou formulí.

Přímku v rovině a v prostoru lze popsat parametrickou rovnicí $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{u}$. V rovině navíc existuje obecná (normálová) rovnice přímky $ax + by + c = 0$ (vektorově $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + c = 0$). Z obecné rovnice lze v případě $b \neq 0$ snadno přejít ke směrnicové rovnici $y = kx + q$.

Vzájemná poloha bodu a přímky je dána především faktem, zda bod na přímce leží nebo neleží. To rozhodneme snadno podle toho, zda jeho souřadnice splňují nebo nesplňují rovnici přímky. Pro vzdálenost bodu od přímky existuje v rovině i v prostoru jednoduchý vzorec.

Vzájemnou polohu dvou přímek vyšetřujeme nejlépe pomocí jejich směrových vektorů a průniku. Přímky mohou být totožné, rovnoběžné různé, různoběžné a v prostoru také mimoběžné. Ve všech čtyřech případech lze snadno spočítat vzdálenost přímek a jejich odchylku, neboli ostrý, příp. pravý úhel α, který svírají.

Otázky:

- Jak popisujeme bod v rovině a v prostoru?
- Napište vzorec, kterým počítáme vzdálenost dvou bodů.
- Vyjmenujte známé tvary rovnice přímky v prostoru a v rovině.
- Formulujte parametrický tvar rovnice přímky. Jak se tento tvar liší v rovině a v prostoru?
- Formulujte obecný tvar rovnice přímky. Jak tento tvar odvodíme z parametrického tvaru?
- Formulujte směrnicový tvar rovnice přímky. Kdy lze použít?
- Jaký je fundamentální důvod, proč v prostoru neexistuje obecný ani směrnicový tvar rovnice přímky?
- Jakou vzájemnou polohu může mít bod a přímka? Jak tuto polohu určíme na základě jejich rovnic?
- Jakým vzorcem vypočteme vzdálenost bodu a přímky v rovině a v prostoru?
- Jakou vzájemnou polohu mohou mít dvě přímky v rovině a v prostoru? Jak tuto polohu určíme na základě jejich rovnic?
- Jak vypočteme vzdálenost dvou rovnoběžek a jak vzdálenost dvou mimoběžek?

Příklad 1.

Napište parametrickou a obecnou (normálovou) rovnici přímky, procházející body:
a) $A=\left[-3,1\right]$, $B=\left[0,2\right]$; b) $A=\left[-1,0\right]$, $B=\left[3,-2\right]$.

Příklad 2.

Vypočtěte vzdálenosti dvojic geometrických útvarů:
a) $A=\left[-2,1\right]$, $B=\left[1,2\right]$; b) $A=\left[-1,2\right]$, p: $3x-2y+5=0$;
c) $p:\ \mathbf{r}=\left(4,-2,\ 3\right)+t\left(-1,\ 5,\ 2\right)$, $q:\ \mathbf{r}=\left(-2,\ 3,\ 1\right)+s\left(0,-5,\ 1\right)$.

Příklad 3.

Vyšetřete vzájemnou polohu přímek:
a) $p:\ \mathbf{r}=\left(1,\ 3\right)+t\left(-2,\ 1\right)$, $q:\ \mathbf{r}=\left(3,\ 0\right)+s\left(-1,\ 1\right)$;

b) $p:\ 2x+y=0$, $q:\ x+\dfrac{y}{2}-3=0$.

Řešení příkladů:

1a) Parametrická rovnice $\mathbf{r} = (-3,\ 1) + t(3,\ 1)$, obecná rovnice $-x + 3y - 6 = 0$;

1b) Parametrická rovnice $\mathbf{r} = (-1,\ 0) + t(4, -2)$, obecná rovnice $2x + 4y + 2 = 0$.

Pozor, vaše správné výsledky nemusí být přesně totožné s uvedenými, ale musí být ekvivalentní!

2a) $d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \sqrt{10}$; 2b) $d(\mathrm{A}, p) = \frac{2}{\sqrt{13}}$; 2c) $d(p,\ q) = \frac{95}{\sqrt{251}}$.

3a) Různoběžky, $p \cap q = [-1, 4]$, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$; 3b) Rovnoběžky, $d(p,\ q) = \frac{6}{\sqrt{5}}$.

Další zdroje:

1. POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky*. 6. vyd. Praha: Prometheus, 1997.
2. POLÁK, J. *Středoškolská matematika v úlohách I*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996.
3. POLÁK, J. *Středoškolská matematika v úlohách II*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996.
4. REKTORYS, K. a spol. *Přehled užité matematiky*. 6. přepr. vyd. Praha: Prometheus, 1995.

Z Á V Ě R :

[Tady klepněte a pište]