

Měření mechanické hysterese smyčky a modulu pružnosti ve smyku

Úkol č.1: Získejte mechanickou hysterese křivku pro dráty různé tloušťky a z různých materiálů. Z naměřených hodnot určete modul pružnosti ve smyku (torzi) statickou metodou.

Pomůcky

Hliníkový, měděný a ocelový drát různých průměrů, vodorovná kladka s úhloměrem, stativový materiál, měřicí pásmo, mikrometr, siloměr se stativem.

Teorie

Modul pružnosti ve smyku G patří k důležitým charakteristikám materiálů v technické praxi. Je-li deformace dokonale pružná, je modul pružnosti látky číselně roven napětí při 100%-ní relativní deformační změně (torzním otočení). Jednotkou modulu pružnosti v soustavě SI je $\text{N}\cdot\text{m}^{-2} = \text{Pa}$. Modul pružnosti lze měřit statickými nebo dynamickými metodami.

Statická metoda měření modulu pružnosti drátu délky l a kruhového průřezu o poloměru r , vychází z Hookova zákona. Drát, který je na jednom konci upevněn, se působením momentu síly o velikosti M na druhém konci stočí o úhel φ , pro který lze ze zmíněného zákona odvodit vztah

$$\varphi = \frac{2\pi l M}{G(\pi r^2)^2}. \quad (1)$$

Výpočet momentu působící síly je jednoduchý, je-li její nositelkou kolmice k ose otáčení. V tom případě je velikost momentu

$$M = Fa, \quad (2)$$

kde a je kolmá vzdálenost vektorové přímky síly od osy otáčení, zvaná rameno síly. Moment síly leží v ose otáčení (tzv. axiální vektor) a jeho směr je dán pravidlem pravé ruky.

Ze vztahů (1) a (2) lze modul pružnosti vyjádřit jako

$$G = F \frac{2\pi la}{\varphi(\pi r^2)^2}. \quad (3)$$

Vyneseme-li do grafu na osu x úhel stočení φ a na osu y odpovídající moment síly, který nejprve zvyšujeme do určité limitní hodnoty φ_m , poté zmenšujeme přes nulu až na $-\varphi_m$ a nakonec zpět zvýšíme na φ_m , obdržíme tzv. hysterese křivku, ze které je patrné, že i při

nulové velikosti působící síly zůstává drát deformován (deformace je zčásti tvárná – plastická).

Postup měření

1. Délku l vybraného drátu změříme pásmem, jeho průměr $2r$ mikrometrem.
2. Drát připevníme horním koncem ke stativu, dolním koncem k otočnému kotouči s úhloměrem.
3. K obvodu kotouče připojíme siloměr a změříme vzdálenost a bodu upevnění od středu kotouče (rameno síly).
4. Posunutím siloměru ve směru tečném ke kotouči pootočíme kotoučem o určitý* (malý) úhel φ . Odečteme úhel φ na úhloměru a velikost síly F na siloměru. Ze vztahu (2) vypočítáme odpovídající velikost momentu síly M .
5. Uvedené veličiny vynášíme do tabulky (Tabulka 1). Úhel φ nejprve zvětšujeme do určité limitní hodnoty φ_m , pak jej zmenšujeme přes nulu až do hodnoty $-\varphi_m$ a nakonec se přes nulu vrátíme zpět na maximální hodnotu φ_m .
6. Vyneseme do grafu závislost M na φ .
7. Do vztahu (3) dosadíme** za úhel φ maximální hodnotu φ_m a za F odpovídající sílu. Vypočtený modul pružnosti materiálu ve smyku (torzi) G srovnáme s tabelovanou hodnotou pro daný materiál.
8. Kroky 1 – 7 tohoto postupu opakujte pro dráty různé tloušťky a různých materiálů (viz část Pomůcky).

Tabulka 1: Záznam veličin potřebných k získání hysterese smyčky.

Materiál:					
Poloměr drátu $r =$		Délka drátu $l =$		Rameno síly $a =$	
φ (°)	F [N]	M [Nm]	φ (°)	F [N]	M [Nm]

* Doporučujeme zvolit konstantní změnu ve velikosti síly F a odečítat úhel φ . Je možné měřit, i když siloměr není ve směru tečném ke kotouči?

** Úhly dosazujte v radiánech.

Chyba měření

Chybu měření vyhodnotíme jako chybu nepřímého měření. Ze vztahu (3) vyplývá, že nepřímě měřený modul pružnosti ve smyku je funkcí pěti proměnných $G = G(a, F, \varphi, l, r)$. Chybu měření proto udává vztah

$$\overline{\Delta G} = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial a}\right)^2 |\overline{\Delta a}|^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial F}\right)^2 |\overline{\Delta F}|^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial \varphi}\right)^2 |\overline{\Delta \varphi}|^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial l}\right)^2 |\overline{\Delta l}|^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial r}\right)^2 |\overline{\Delta r}|^2}. \quad (4)$$

Parciální derivace

$$\frac{\partial G}{\partial a} = \frac{2\pi Fl}{\varphi(\pi r^2)^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial F} = \frac{2\pi al}{\varphi(\pi r^2)^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial \varphi} = -\frac{2\pi Fal}{\varphi^2(\pi r^2)^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial l} = \frac{2\pi Fa}{\varphi(\pi r^2)^2} \quad \text{a} \quad \frac{\partial G}{\partial r} = -4\frac{2\pi Fal}{\varphi\pi^2 r^5}$$

dosadíme do (4) a postupnými úpravami za použití vztahu (3) dostaneme

$$\overline{\Delta G} = G \sqrt{\left(\frac{|\overline{\Delta a}|}{a}\right)^2 + \left(\frac{|\overline{\Delta F}|}{F}\right)^2 + \left(\frac{|\overline{\Delta \varphi}|}{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{|\overline{\Delta l}|}{l}\right)^2 + \left(4\frac{|\overline{\Delta r}|}{r}\right)^2}. \quad (5)$$

Střední chyby všech veličin stanovíme podle použitého měřidla (polovina nejmenšího dílku stupnice měřidla). Výjimku tvoří chyba $\overline{\Delta r}$, která je pouze čtvrtinou nejmenšího dílku, neboť byl měřen průměr drátu d a poloměr vypočítán jako $r = \frac{d}{2}$ (tudíž také $\overline{\Delta r} = \frac{\overline{\Delta d}}{2}$).

Doporučená literatura

SKLENÁK, L. *Základní praktikum z fyziky I*. 1. vyd. Ostrava: PdF v Ostravě, 1988. 4.4.2 Měření modulu pružnosti ve smyku statickou metodou, s. 72-76.

BROŽ, J. A KOL. *Základy fyzikálních měření I*. 1. vyd. Praha: SPN, 1983. 2.3.1.2 Měření modulu pružnosti ve smyku, s. 126-127.

MÁDR, V., KNEJZLÍK, J., KOPEČNÝ, J. *Fyzikální měření*. Praha: SNTL, 1991. 2.8 Modul pružnosti, s. 112-114.

Úkol č.2: Dynamickou metodou určete poměr modulů pružnosti vybraných materiálů.

Pomůcky

Hliníkový, ocelový a měděný drát o stejné délce a poloměru; vodorovná kladka s úhloměrem, stativový materiál, stopky.

Teorie

Modul pružnosti ve smyku je přímo úměrný momentu setrvačnosti J torzního kyvadla, délce drátu l a nepřímo úměrný druhé mocnině doby kmitu T a čtvrté mocnině poloměru drátu r

$$G = \frac{8\pi l J}{T^2 r^4}. \quad (6)$$

Torzní kmity jsou vyvolány pružnou deformací drátu ve smyku. Protože však přesně neznáme moment setrvačnosti J kyvadla, nebudeme určovat hodnoty modulů pružnosti, ale stanovíme pouze poměr $G_{Al} : G_{Cu} : G_{Ocel}$, pro který ze vztahu (6) plyne (za předpokladu stejné délky a poloměru drátů)

$$\boxed{G_{Al} : G_{Cu} : G_{Ocel} = \frac{1}{T_{Al}^2} : \frac{1}{T_{Cu}^2} : \frac{1}{T_{Ocel}^2}}. \quad (7)$$

Postup měření

1. Pružnou deformací hliníkového drátu ve smyku vyvoláme kmity torzního kyvadla. Změříme celkový čas deseti kmitů.
2. Měření zopakujeme pro měděný a ocelový drát (stejně délky i poloměru jako drát hliníkový).
3. Naměřené doby kmitu dosadíme do vztahu (7). Vypočtený poměr normujeme tak, aby $G_{Al} \rightarrow 1$ a porovnáme s obdobným poměrem sestaveným z hodnot naměřených v první úloze a z hodnot tabelovaných.

Chyba měření

Měření provádíme co nejpečlivěji, chybu měření nestanovujeme.

Doporučená literatura

SKLENÁK, L. *Základní praktikum z fyziky I*. 1. vyd. Ostrava: PdF v Ostravě, 1988. 4.4.3 Měření modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou, s. 76-79.

BROŽ, J. A KOL. *Základy fyzikálních měření I*. 1. vyd. Praha: SPN, 1983. 2.3.1.2 Měření modulu pružnosti ve smyku, s. 126-127.

MÁDR, V., KNEJZLÍK, J., KOPEČNÝ, J. *Fyzikální měření*. Praha: SNTL, 1991. 2.8 Modul pružnosti, s. 114-116.