3. PROTOKOL O MĚŘENÍ

V této kapitole se dozvíte:

- jak má vypadat a jaké náležitosti má splňovat protokol o měření;
- jak stanovit chybu měřené veličiny;
- jak vyhodnotit úspěšnost měření, zejména jeho přesnost.

Budete schopni:

- vypracovat protokol o měření, odpovídající všem uvedeným požadavkům;
- určit chybu veličiny přímo i nepřímo měřené.

Klíčová slova této kapitoly:
protokol o měření, veličiny přímo a nepřímo měřené, absolutní a relativní chyba měření, krajní chyba měření, úplná krajní chyba měření, interval spolehlivosti, riziko, hladina významnosti, maximální přípustná chyba přístroje, přesnost měření.

Čas potřebný k prostudování učiva kapitoly:
1,25 hodiny

3.1 Struktura protokolu o měření

Z každého uskutečněného měření je nutné vypracovat protokol. Tento protokol má dvě základní funkce. Jednak informuje o průběhu a hlavních výsledcích měření, jednak je dokladem o tom, kým a kdy bylo měření provedeno.

Správně vypracovaný protokol by měl obsahovat následující údaje:

- jméno autora a spolupracovníka;
- datum měření;
- úkol měření;
- stručnou teorii měřící metody;
- postup měření;
- naměřené hodnoty;
- vypočtené hodnoty;
- stanovení chyby měření;
- závěr.

Ve zbývajících kapitolách rozebereme několik problémů, které se při vypracování protokolu o měření nejčastěji objevují.

3.2 Zápis výpočtů do protokolu o měření

U většiny měřících úloh je třeba z daných, zpravidla přímo naměřených hodnot, vypočítat hodnoty jiných veličin, které nás zajímají. Do protokolu o měření zapisujeme výpočet následovně:

Nejprve uvedeme obecný výpočetní vztah (vzorec s proměnnými), pak vzorec s dosazenými hodnotami za jednotlivé proměnné a nakonec vypočtenou hodnotu, vhodně zaokrouhlenou.

Příklad.

Výpočet obrazové ohniskové vzdálenosti f' pomocí předmětové vzdálenosti a a obrazové vzdálenosti a':

$$\boxed{f' = \frac{a \cdot a'}{a - a'} = \frac{(-5,2) \cdot 7,4}{-5,2 - 7,4} \doteq 3,05397}$$

Z výpočtu zapsaného podle uvedených pravidel lze vyčíst všechny potřebné údaje, tzn. použitý výpočetní vztah, hodnoty dosazených veličin a vypočtenou hodnotu. Při kontrole je tudíž možné celý výpočet zopakovat. Pokud k tomu není konkrétní důvod, neuvádějí se žádné mezivýsledky. Ve výsledku se ponechává dostatečný počet platných cifer, který se zmenší teprve po stanovení chyby měření (viz dále).

Pokud se podle stejného vzorce počítá větší počet hodnot (organizovaných zpravidla v tabulce), provede se výše uvedeným způsobem pouze výpočet první hodnoty, který slouží také jako příklad výpočtu ostatních hodnot.

3.3 Určení přesnosti měření

Určení přesnosti měření výpočtem chyby naměřených hodnot se obyčejně považuje za zbytečnou a otravnou činnost. Rád bych Vás přesvědčil, že tomu tak není.

Bez znalosti přesnosti měření je naměřená hodnota k ničemu!

Není asi sporu o tom, že žádné měřící zařízení neměří absolutně přesně (alespoň měříme-li spojité, tj. nediskrétní veličiny). Dejme tomu, že pomocí nějakého zařízení naměříme hodnotu určité veličiny 5 jednotek. Pokud nevíme, jak přesné je měřící zařízení, nevíme o skutečné hodnotě dané veličiny absolutně nic. Může to být $5 \pm 0,1$ nebo 5 ± 2, ale třeba i 5 ± 20. Teprve máme-li alespoň hrubou představu o přesnosti měření, např. víme-li, že u běžných laboratorních měření je velikost chyby nejčastěji kolem jednoho procenta naměřené hodnoty, může nám být naměřená hodnota 5 užitečná, neboť víme, že skutečná hodnota by se od naměřené neměla lišit o více než 0,05 jednotky.
V tomto kurzu nám ovšem tak hrubý odhad chyby měření stačit nebude. U většiny úloh je třeba chybu výsledné veličiny přesně vypočítat. Pro výpočty chyb měření existuje poměrně rozsáhlá teorie, kterou v případě zájmu naleznete v doporučené literatuře. My se omezíme pouze na jednoduchý výklad, postačující pro naše účely.

3.3.1 Definice chyby měření

Chybou měření veličiny f rozumíme hodnotu Δf takovou, kdy se skutečná hodnota veličiny f se $(100-\alpha)$-procentní jistotou vyskytuje v tzv. $(100-\alpha)$-procentním ***intervalu spolehlivosti*** $\langle \overline{f} - \Delta f; \overline{f} + \Delta f \rangle$ kolem naměřené hodnoty $\overline{f}$.

Jinak řečeno, existuje α-procentní ***riziko***, že skutečná hodnota měřené veličiny leží mimo zjištěný $\left(100-\alpha\right)$-procentní interval spolehlivosti. Veličině α se také říká ***hladina významnosti***.

My budeme používat výlučně tzv. ***krajní chybu*** , charakterizovanou zpravidla hodnotou $\alpha = 1\%$. Existují i jiné chyby, např. ***střední kvadratická*** ($\alpha \approx 32\%$) nebo ***pravděpodobná*** ($\alpha = 50\%$) – viz doporučenou literaturu.

Výše uvedené chyby se označují jako ***absolutní*** a mají rozměr měřené veličiny, oproti tzv. ***relativní chybě*** ρ, která je bezrozměrná a je definována vztahem

$$\boxed{\rho = \frac{\Delta f}{\left|\bar{f}\right|}}, \quad (1)$$

tedy jako poměr příslušné absolutní chyby měření Δf a velikosti naměřené hodnoty $\bar{f}$. Relativní chyba umožňuje kvantitativní porovnání přesnosti různých měření a udává se obvykle v procentech.

3.3.2 Chyba veličiny přímo měřené

Přímo měřenou veličinou rozumíme veličinu, kterou přímo odečteme na stupnici nebo displeji měřícího přístroje. Je třeba odlišit dva případy:

1. Při opakovaných měřeních téže veličiny jsou naměřené hodnoty různé.
Příčinou může být role pozorovatele v procesu měření (subjektivní metoda měření) nebo kolísání hodnoty měřené veličiny, plynoucí z fyzikální podstaty problému (např. fluktuace teploty).
Postupujeme takto: Provedením n měření obdržíme n hodnot f_i, $i = 1, 2..., n$ měřené veličiny f. Jako nejpravděpodobnější hodnotu vezmeme střední hodnotu $\bar{f}$ a jako odhad krajní chyby hodnotu $\Delta\bar{f}$, pro které platí:

$$\boxed{\bar{f} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i}, \qquad \boxed{\Delta\bar{f} \approx 3 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\bar{f}-f_i\right)}{n\left(n-1\right)}}}. \quad (2)$$

2. Při opakovaných měřeních téže veličiny jsou naměřené hodnoty stejné.
Krajní chyba měření je pak dána hodnotou ***maximální připustné chyby*** κ přístroje, uvedené výrobcem v návodu k přístroji. Často se uvádí přesnost přístrojů v procentech. Např. je-li přesnost přístroje např. 5%, znamená to, že skutečná hodnota f se pohybuje v intervalu 0,95 až 1,05 kolem naměřené hodnoty $\bar{f}$ a $\kappa = 0{,}05\bar{f}$.
Pokud není informace o přesnosti přístroje k dispozici, existuje u analogových přístrojů se stupnicí jednoduché praktické pravidlo: maximální připustná chyba přístroje je dána polovinou nejmenšího dílku na stupnici. Typickým případem je např. měření délek pomocí milimetrového měřítka. Zde volíme $\kappa = 0{,}5$ mm.

Půldílkové pravidlo.

Někdy je nutné podchytit v chybě měření oba výše uvedené zdroje chyby: kolísání naměřených hodnot i nepřesnost použitého měřidla. Pak použijeme tzv. ***úplnou krajní chybu***, danou vztahem

$$\boxed{\Delta f = \sqrt{\left(\Delta \bar{f}\right)^2 + \kappa^2}}, \quad (3)$$

kde $\Delta \bar{f}$ je krajní chyba vypočtená podle vztahu (2) a κ je maximální přípustná chyba měřidla. Je zřejmé, že vzorec (3) obsahuje obě výše uvedené alternativy jako speciální případy.

3.3.3 Chyba veličiny nepřímo měřené

Nepřímo měřenou veličinou nazýváme veličinu, kterou vypočítáváme z veličin přímo měřených. Je nutné znát vzorec pro výpočet této veličiny a hodnoty všech vstupních veličin v tomto vzorci figurujících včetně jejich chyb. Chybu výsledné veličiny pak spočítáme snadno pomocí následujícího algoritmu.

Nechť nepřímo měřená veličina f je dána hodnotami přímo měřených veličin a, b, ..., tzn. je funkcí $f(a,b,...)$ několika proměnných. Pak pro chybu Δf veličiny f platí:

$$\boxed{\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 (\Delta a)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 (\Delta b)^2 + \ldots}} \quad (4)$$

Všimněte si, že ve vzorci (4) vystupují parciální derivace podle jednotlivých proměnných. To je celkem přirozené, protože hodnoty těchto derivací informují o tom, jak rychle se funkce f mění při malých změnách jednotlivých proměnných.

Příklad.

Veličina $a = 12$ jednotek byla naměřena s přesností $\Delta a = 0{,}5$ jednotek, veličina $b = 7$ jednotek s přesností $\Delta b = 0{,}25$ jednotek. Nepřímo měřená veličina $f(a,b) = ab^3$ má v odpovídajících jednotkách hodnotu $f(12,\ 7) = 12 \cdot 7^3 = \underline{\underline{4116}}$

a chyba měření je

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 (\Delta a)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 (\Delta b)^2} = \sqrt{b^6 (\Delta a)^2 + 9a^2 b^4 (\Delta b)^2} =$$
$$= \sqrt{7^6 \cdot 0{,}5^2 + 9 \cdot 12^2 \cdot 7^4 \cdot 0{,}25^2} = \sqrt{29412{,}25 + 194481} \doteq \underline{\underline{473{,}17}}.$$

Získaný výsledek správně zapíšeme ve tvaru $f = (4120 \pm 470)$ nebo $f = (4100 \pm 500)$ příslušných jednotek (viz následující kapitolu).

Úkol k zamyšlení.

Zkuste uvážit, která veličina z dvojice a, b přispívá k celkové chybě veličiny f větším dílem a proč tomu tak je.

3.3.4 Zápis naměřené veličiny včetně chyby

Naměřené veličiny včetně chyby zapisujeme ve tvaru

$$\boxed{f = \left(\overline{f} \pm \Delta f\right) \text{ jednotka}} \quad (4)$$

kde $\overline{f}$ je hodnota přímo nebo nepřímo naměřená a Δf je příslušná chyba měření.

Vzniká otázka, kolik platných míst v zápise (4) uvádět. Je zřejmé, že počet platných míst výsledku by měl korespondovat s přesností měření, tzn. velikostí chyby měření. Víme-li například, že chyba měření určité délky je jeden milimetr, nemá cenu uvádět naměřenou délku na tisíciny milimetru.

Platí jednoduché pravidlo: chybu měření Δf zaokrouhlujeme na jedno, maximálně dvě platná místa a naměřenou hodnotu $\overline{f}$ zaokrouhlujeme tak, aby její nejnižší zapsaný řád odpovídal nejnižšímu zapsanému řádu chyby měření Δf.

Příklad.

Správně zapsané jsou tyto naměřené hodnoty: $l = (8{,}24 \pm 0{,}25)\,\text{cm}$, $Q = (1850 \pm 240)\,\text{J}$, $\alpha = (59{,}8 \pm 0{,}1)°$, $F = (5{,}84 \pm 0{,}01) \cdot 10^2$ N atd. Chybně zapsané jsou následující naměřené hodnoty: $l = (8{,}23548 \pm 0{,}25)$ cm, $Q = (1850 \pm 243)$ J, $\alpha = (59{,}8475 \pm 0{,}1368)°$ apod.

3.4 Závěr protokolu o měření

Závěr je nejdůležitější částí protokolu o měření. Měl by obsahovat:

- výsledek měření, zpravidla uvedený přímo ve formě $f = \overline{f} \pm \Delta f$, v případě více naměřených hodnot jejich tabulku nebo graf; přípustný je také odkaz na tabulku nebo graf, uvedené v jiné části protokolu;
- porovnání výsledků s očekávanými nebo tabelovanými hodnotami;
- zhodnocení přesnosti měření, zejména zjištění, zda je očekávaná nebo tabelovaná hodnota v chybovém intervalu kolem naměřené hodnoty a určení relativní chyby měření (***přesné měření***: $\rho < 1\%$, ***laboratorní měření***: $1\% < \rho < 5\%$, ***provozní měření***: $5\% < \rho < 20\%$);
- eventuální příčinu toho, že naměřené hodnoty se od očekávaných či tabelovaných liší o více než chybu měření;
- zhodnocení průběhu měření, zda proběhlo podle návodu či nikoliv, uvedení všech podstatných okolností, které ovlivnily nebo dokonce narušily průběh měření apod.;
- jiné podstatné informace týkající se konkrétního průběhu měření nebo měřící metody, návrhy na vylepšení metody měření atd.

Nepodceňujte závěr!

Shrnutí kapitoly.
Protokol o měření je dokladem o provedeném měření a současně záznamem o naměřených hodnotách. Skládá se z několika přesně definovaných částí, jejichž pořadí a obsah je nutné dodržovat.
Při zápisu výpočtu libovolné veličiny do protokolu o měření uvádíme nejprve obecný vztah, pak vztah s dosazenými číselnými hodnotami za proměnné a nakonec číselný výsledek.
Přesnost měření vyhodnocujeme kvantitativně výpočtem chyby naměřených veličin. V tomto praktiku pracujeme s krajní chybou, která udává poloviční délku intervalu kolem naměřené hodnoty, ve kterém by se měla vyskytovat přesná hodnota s pravděpodobností 99%.
Určení chyby veličin přímo měřených a nepřímo měřených se podstatně liší. U přímo měřených veličin stanovujeme chybu na základě údajů o přesnosti použitého přístroje. V případě, že při opakovaných měřeních naměřená hodnota kolísá, je nutné provést více (obvykle 5 nebo 10) měření a výsledky statisticky zpracovat. U veličin nepřímo měřených (počítaných podle určitého vzorce z veličin přímo měřených) je třeba znát chyby všech přímo měřených veličin a použít výpočetní vztah s parciálními derivacemi.
Pro zápis a zaokrouhlení veličiny naměřené s určitou chybou platí přesná pravidla, která je nutné stále dodržovat.
Podstatnou částí protokolu je závěr. Závěr by měl obsahovat zejména výsledné hodnoty měřených veličin a zhodnocení přesnosti měření na základě naměřených hodnot, očekávaných hodnot a krajních chyb naměřených veličin.

Otázky.

1. Vyjmenujte hlavní části protokolu o měření.
2. Jak zapisujeme výpočet určité veličiny do protokolu o měření?
3. Jak je definována chyba měření? Jaké druhy chyb znáte?
4. Jak určujeme krajní chybu veličiny přímo měřené? Jaké dva základní případy je nutné rozlišit?
5. Co je to úplná krajní chyba měření?
6. Jak počítáme chybu veličiny nepřímo měřené? Uveďte obecný vzorec!
7. Jak zapisujeme veličinu naměřenou s určitou chybou? Jaká zaokrouhlovací pravidla platí?
8. Jaké hlavní informace bychom měli psát do závěru protokolu o měření?

Průvodce studiem.

Tato kapitola obsahuje poměrně hodně teorie a byla pro Vás asi dosti náročná. Probranou látku si prakticky ověříte při tvorbě protokolů o měření.

Ve zbylé části této studijní opory naleznete seznam pěti úloh, které budete vlastnoručně měřit v optické laboratoři katedry fyziky Ostravské univerzity. Není nutné učit se zde něco zpaměti. Návody si postupně pročtěte a zkuste si odpovědět na kontrolní otázky. Pokud budete umět svými slovy formulovat princip měřené úlohy a budete mít základní představu o postupu měření, bohatě to bude pro naše účely stačit.